[MACIERZATOR57]

Gazetka redagowana przez Koło Naukowe Matematyków Uniwersytetu Śląskiego

Witamy w grudniowym numerze [MACIERZATORA]!

Tym razem proponujemy Czytelnikom krótką recenzję wydanej w ostatnim miesiącu książki Mariusza Urbanka *Genialni. Lwowska szkoła matematyczna*, artykuł o „miękkiej" i „twardej" analizie, zainspirowany wpisem na blogu laureata Medalu Fieldsa, Terence'a Tao, kącik techniczny traktujący o liniowych równaniach rekurencyjnych oraz *Kącik łamania głowy* z hitori – bliskim krewnym sudoku – w roli głównej.

Okładkę zdobi natomiast zdjęcie *Math meets the beauty of light* autorstwa Benjamina Schwarzbauera, zwycięzcy konkursu artystycznego *Matematyczny świat*, zorganizowanego w ramach zeszłorocznego Święta Liczby Pi.

Ciekawej lektury oraz wszystkiego dobrego na cały nowy rok 2015

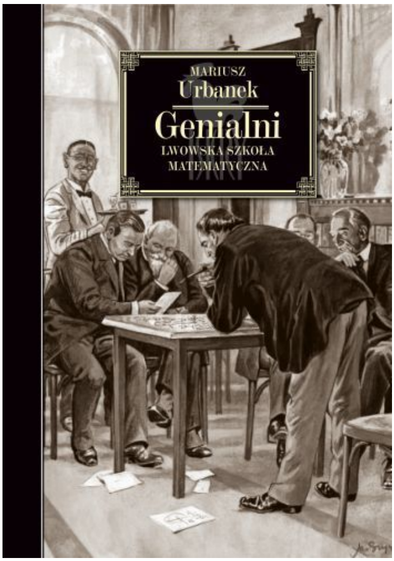
życzy Redakcja

[Opowiedzieć matematykę]

Genialni. Lwowska szkoła matematyczna

Historia lwowskiej szkoły matematycznej jest tak barwna i ciekawa, że aż dziw, iż dotychczas szerszej publiczności nie było dane jej poznanie. Owszem, matematycy mieli świetną merytorycznie książkę *Lwowska szkoła matematyczna* autorstwa profesora Romana Dudy, ale jest to pozycja zdecydowanie za trudna dla czytelnika niebędącego co najmniej studentem matematyki, i to najlepiej teoretycznej. Tak więc o lwowskich matematykach, a tym samym – ich dokonaniach – większość Polaków dotychczas nie miała pojęcia.

Sytuację tę być może zmieni wydana w dosłownie ostatnich dniach biografia pióra Mariusza Urbanka. Autor, z wykształcenia prawnik, a z zawodu pisarz specjalizujący się w biografiach, co prawda w wywiadach otwarcie przyznaje, że nie był w stanie zrozumieć, czym dokładnie jest przestrzeń Banacha – i przyznam, że wzbudziło to mój spory niepokój. Jak wobec tego wypadnie jego książka?



Genialni. Lwowska szkoła matematyczna traktuje o matematykach, a nie o matematyce. Jej tło jest zdecydowanie historyczne, a nie – matematyczne. Ma to swoje zalety i wady. Główną zaletą jest to, że dzięki temu książka ma szansę trafić do szerszego grona; jest całkowicie zrozumiała dla laika. Autor koncentruje się na tym, co jego zainteresowało; pełno jest historii (tak prawdziwych, jak raczej anegdotycznych), humoru, ciekawych wyrywków ze wspomnień, dowcipnych opowieści. Takie przedstawienie matematyków skupionych we Lwowie sprawia, że stają się oni bardzo prawdziwi także dla tego, kto nigdy wcześniej o analizie funkcjonalnej nie słyszał. Przedstawienie pod kątem historycznym jest też bardzo oryginalne; matematyków zazwyczaj nie interesuje sytuacja polityczna czy przemiany ustrojowe (szczególnie w kontekście biografii wielkich naukowców); tego dotychczas nie było.

Ale są i wady. Książki przed wydaniem nie przeczytał żaden matematyk, co wiem choćby z tego fragmentu: *Pierre Fermat napisał na marginesie czytanej książki, że znalazł dowód twierdzenia, iż dla liczby naturalnej* $n > 2$ *nie istnieją takie dodatnie liczby naturalne x, y, z, które spełniałyby równanie* $x^n + y^n = z^n$. *Mówiąc inaczej, suma dwóch liczb x, y podniesionych do kwadratu może być kwadratem ich sumy, ale suma dwóch liczb podniesionych do potęgi trzeciej nie może już być sześcianem ich sumy itd.* Owszem, błędów matematycznych ogólnie jest mało (bo i mało matematyki), ale mimo wszystko: pomylić Wielkie Twierdzenie Fermata z... no właśnie, czym? Wzorem skróconego mnożenia? Nawet nie wiem, skąd autorowi przyszła na myśl druga część tego fragmentu... Takich rzeczy być nie powinno. Brak matematycznej korekty dziwi tym bardziej, że książkę kończy naprawdę świetna rozmowa z profesorem Romanem Dudą, który objaśnia, prostuje, dopowiada. Wywiad ten jest nie tylko ciekawy, ale i podnosi wartość merytoryczną książki.

Wydawnictwo Iskry *Genialnych...* wydało bardzo elegancko: w twardej oprawie, szytej, z świetnie dobraną grafiką na obwolucie. Książka jest po prostu ładna. Jest też bez wątpienia fascynująca, zawiera wiele bardzo ciekawych faktów, bardziej i mniej znanych w matematycznym środowisku. Zawiera również fakty dla wielu matematyków zapewnie mniej interesujące (jak poglądy polityczne konkretnych osób), ale być może frapujące dla innych czytelników.

Cieszę się, że książka Mariusza Urbanka została wydana. Co prawda matematyk zapewne skrzywi się raz niejeden podczas lektury (na przykład widząc, że autor nie do końca rozumie, czym jest dowód, co niechcący odkrywa, opisując słynną historię Mazura, Enflo i gęsi), ale jedno nie ulega wątpliwości: po raz pierwszy lwowska szkoła matematyczna realnie wkracza do księgarni niespecjalistycznych. I można mieć nadzieję, że postaci pracujących we Lwowie matematyków, ze Stefanem Banachem, Hugonem Steinhausem, Stanisławem Mazurem i Stanisławem Ulamem na czele, staną się znane szerszej publiczności.

Joanna Zwierzyńska

Literatura

[1] Mariusz Urbanek, *Genialni. Lwowska szkoła matematyczna,* Wydawnictwo Iskry, Warszawa 2014, ISBN 978-83-244-0381-3.

[„Miękka" i „twarda" analiza]

O tym jak można podzielić jeden z najważniejszych działów matematyki

Przeszukując Internet, napotkałam bardzo interesujący blog Terence'a Tao — 39-letniego australijskiego matematyka, który już w wieku 17 lat otrzymał tytuł magistra na Uniwersytecie w Flinders, a 8 lat później został profesorem matematyki na Uniwersytecie w Los Angeles. Profesor Tao został odznaczony Medalem Fieldsa[1] za swoje osiągnięcia naukowe, spośród których najbardziej znane jest *twierdzenie Greena-Tao*, mówiące, że ciąg wszystkich liczb pierwszych zawiera dowolnie długie (skończone) podciągi arytmetyczne. Jego blog jest poświęcony różnym matematycznym zagadnieniom. Szczególnie interesujący okazał się dla mnie artykuł [2] mówiący o pewnym nieformalnym podziale twierdzeń i pojęć analizy matematycznej na dwa rodzaje, który pokrótce Wam, drodzy Czytelnicy, postaram się przybliżyć. A więc zaczynamy!

Intuicyjnie chodzi o podział analizy matematycznej na analizę „ilościową" i „skończoną" oraz analizę „jakościową" i „nieskończoną". Pierwszy wspomniany wyżej rodzaj, który nazywać będziemy *analizą twardą* (ang. *hard analysis*), koncentruje się głównie na skończonych wielkościach (np. kardynalności zbiorów skończonych, mierze ograniczonych zbiorów, wartości zbieżnych całek, normie skończenie wymiarowego wektora itd.) i ich własnościach (w szczególności ograniczeniach dolnych i górnych). Drugi rodzaj, tj. *analiza miękka* (ang. *soft analysis*) zajmuje się obiektami o charakterze nieskończonym, takimi jak: ciągi, zbiory i funkcje mierzalne, σ-algebry, przestrzenie Banacha oraz ich własnościami: zbieżnością, ograniczonością, całkowalnością, zupełnością, zwartością itd. Mówiąc symbolicznie, twarda analiza jest matematyką, w której używamy symboli: ε, N, $O()$, $\leqslant$, zaś miękka analiza jest matematyką symboli takich jak: 0, ∞, $\in$ i $\longrightarrow$.

Na pierwszy rzut oka te dwa rodzaje analizy wyglądają zupełnie inaczej: odnoszą się do różnych typów obiektów, korzystają z odmiennych technik dowodowych, używają nawet innych aksjomatów. Przykładowo, aksjomat nieskończoności oraz aksjomat wyboru są często przywoływane w miękkiej analizie, ale nie w twardej. W konsekwencji istnieją problemy, które mogą być łatwo udowodnione w miękkiej analizie, ale niemożliwe do udowodnienia poprzez metody stosowane w analizie twardej. Przykładem takiego problemu jest *twierdzenie Parisa-Harringtona.* Aby je dobrze zrozumieć musimy

[1] Najbardziej prestiżowa nagroda przyznawana w dziedzinie matematyki co cztery lata dwóm, trzem lub czterem uczonym, których wiek nie przekracza 40 lat. Niestety, związana jest z nią raczej symboliczna premia finansowa.

[2] `www.terrytao.wordpress.com/2007/05/23/`

poznać treść *twierdzenia Ramseya*. Ono zaś mówi, że dla każdej liczby naturalnej k istnieje taka liczba naturalna n, że wśród dowolnych n osób zawsze znajdziemy k osób, które nie znają się żadna z żadną. Metodami, którymi posługuje się analiza miękka zostało udowodnione pewne wzmocnienie tego twierdzenia. Wspomniane wyżej twierdzenie Parisa-Harringtona mówi, że tego wzmocnienia nie da się udowodnić na gruncie arytmetyki Peana, czyli narzędziami analizy twardej.

Matematycy zajmujący się matematyką dyskretną, analizą harmoniczną i analityczną teorią liczb kładą nacisk na analizę twardą, podczas gdy matematycy zajmujący się np. teorią ergodyczną wykorzystują narzędzia miękkiej analizy.

Jasnym jest, że rezultaty uzyskane przez miękką i twardą analizę mogą być ze sobą łączone. W wielu przypadkach analiza jakościowa może być rozpatrywana jako wygodna abstrakcja analizy ilościowej, w której dokładna zależność pomiędzy różnymi skończonymi wielkościami została skutecznie ukryta poprzez użycie notacji nieskończonej. Odwrotnie, analiza ilościowa często może być postrzegana jako bardziej precyzyjne i szczegółowe dopracowanie analizy jakościowej. Co więcej, jedna metoda w twardej analizie może mieć kilka odpowiedników w miękkiej analizie. Ponadto, z użyciem notacji analizy miękkiej twierdzenie może wyglądać całkowicie inaczej niż w drugim rodzaju analizy. Naiwne tłumaczenie stwierdzeń z miękkiej analizy bezpośrednio na język, jakim posługuję się twarda analiza może być niepoprawne.

W analizie miękkiej twierdzenia są definiowane poprzez takie pojęcia jak m.in. zwartość i mierzalność, zaś w twardej analizie poprzez np. rozmiar, zupełność czy przybliżenie. Ogólnie mówiąc, miękka analiza może być źródłem pomysłów i intuicji w dowodach twardej analizy i na odwrót. Ten fakt zobrazujemy pewnym prostym, lecz nie tak bardzo znanym rezultatem. Każdemu dobrze jest znane poniższe twierdzenie, które według naszego podziału zalicza się do analizy miękkiej:

Twierdzenie. *Każdy ograniczony i monotoniczny ciąg liczb rzeczywistych* (x_n) *jest zbieżny.*

Co mogłoby być jego odpowiednikiem w twardej analizie? Czy bezpośrednie przeformułowanie jego treści z użyciem notacji, jaką się ona posługuje będzie poprawne? Na te pytania odpowiedź znajdziecie już w moim kolejnym artykule w styczniowym numerze [MACIERZATORA].

Martyna Biskup

[Kącik techniczny]

Liniowe układy równań rekurencyjnych

Streszczenie

Stało się. Wreszcie nadszedł ten sądny dzień, w którym zmuszony jesteś, drogi Czytelniku, rozwiązać liniowe równania rekurencyjne. Stare, zakurzone notatki z algebry liniowej wydają się milczeć na ten temat, a myśl o wykorzystaniu funkcji tworzących napawa Cię lękiem. Gorączkowe poszukiwania w internecie gotowych algorytmów przyprawiają o zawrót głowy, co więcej z każdym przeczytanym wyrazem „indukcja” czy zwrotem „czynnik sumacyjny” rośnie frustracja i poczucie bezsilności. Jeżeli powyższa sytuacja pasuje do Ciebie, być może warto przeczytać ten artykuł do końca. W przeciwnym razie... a nuż znajdziesz coś intrygującego?

Zanim jednak zaczniemy zagłębiać się w temat równań rekurencyjnych, musimy się ustalić pewne konwencje oraz, co będzie wymagało nieco cierpliwości, określić to, z czym będziemy mieć do czynienia – czyli **liniowymi równaniami rekurencyjnymi**.

Oznaczenie. Umówimy się, że $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$. Dla zbioru liczb naturalnych z zerem warto przyjąć oznaczenie $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. W dalszej części będziemy zakładać, że współczynniki są z ustalonego ciała (liczb rzeczywistych lub zespolonych), a indeksy są liczbami naturalnymi. Będziemy zajmować się układami liniowymi, zatem w takim kontekście należy rozumieć sformułowania równań rekurencyjnych.

Definicja 1.1. Jednorodnym liniowym równaniem rekurencyjnym rzędu k o stałych współczynnikach będziemy nazywać równanie postaci:

$$x_{n+k} = a_{k-1}x_{n+k-1} + \ldots + a_1 x_{n+1}. \tag{1.1}$$

Rozwiązaniem szczególnym powyższego równania będzie każdy ciąg $x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (lub $x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$) spełniający to równanie dla każdej liczby naturalnej n. **Rozwiązaniem ogólnym** będzie natomiast zbiór wszystkich rozwiązań szczególnych, które utożsamimy z funkcją podanego typu zależną od k stałych.

Nic nie stoi na przeszkodzie, by wszystkie wyrazy przenieść na jedną stronę, tym niemniej zapewne większość z Was jest przyzwyczajona do takiej formy równań rekurencyjnych i taką też pozostawię. Zauważmy, że powyższe definicje są utworzone na wzór pojęć znanych z działu liniowych równań różniczkowych zwyczajnych. Podobieństwo to jest nieprzypadkowe: będziemy próbowali przenieść metody znane z rachunku analitycznego na grunt **równań róznicowych** (bo tak można myśleć o równaniach rekurencyjnych). Nie będzie niczym zaskakującym fakt, iż wprowadzimy bardzo użyteczne pojęcie **równania charakterystycznego**.

Definicja 1.2. Równaniem charakterystycznym równania (1.1) nazywamy równanie wielomianowe jednej zmiennej postaci[3]:

$$y^k - a_{k-1}y^{k-1} - \ldots - a_1 y^1 = 0. \tag{1.2}$$

Równanie charakterystyczne pozwala nam przewidywać postać ogólną rozwiązania, o czym będzie nam świadczyć poniższe twierdzenie, podane bez dowodu.

Twierdzenie 1.1. *Jeżeli równaniu (1.1) odpowiada równanie charakterystyczne* **o różnych pierwiastkach***, tj. każdy pierwiastek tego równania jest jednokrotny, to rozwiązaniem ogólnym równania (1.1) jest funkcja zadana wzorem:*

$$x_n = c_1 \left(y_1\right)^n + \ldots + c_k \left(y_n\right)^n,$$

gdzie y_i są pierwiastkiami zespolonymi równania charakterystycznego (1.2), $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Nietrudno przewidzieć, że jeżeli tylko zadamy „warunki początkowe”, tj. wartości x_1, …, x_k, to otrzymane rozwiązanie będzie wyznaczone w sposób jednoznaczny. Poniższy przykład pokaże metodę otrzymywania stałych c_1, …, c_k.

Przykład 1.1. Dane jest równanie:

$$\begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -1 \\ x_{n+2} = -x_{n+1} + 2x_n \end{cases}$$

Zaczniemy od rozwiązania wielomianu charakterystycznego tego równania, mianowicie:

$$y^2 + y - 2 = 0.$$

[3]Litera y została wprowadzona, by uniknąć kolizji oznaczeń; tym niemniej należy pamiętać, że poniższe równanie **odpowiada** równaniu różnicowemu (1.1) – nie należy przyzwyczajać się zbytnio do symboli.

Możemy się przekonać, że pierwiastkami tego równania kwadratowego są liczby $y_1 = -2$ oraz $y_2 = 1$. Przewidujemy zatem postać równania jako:

$$x_n = c_1(-2)^n + c_2.$$

Aby wyznaczyć stałe c_1, c_2, rozwiązujemy układ równań powstały poprzez przyrównanie wartości x_1 oraz x_2 z przewidywaną postacią funkcji:

$$\begin{cases} 5 = c_1(-2)^1 + c_2, \\ -1 = c_1(-2)^2 + c_2, \end{cases}$$

z czego dostajemy $c_1 = -1$ oraz $c_2 = 3$. Zatem rozwiązaniem naszego równania jest ciąg postaci $x_n = -(-2)^n + 3$.

Czytelnicy zaznajomieni z rachunkiem różniczkowym zapewne już wiedzą, jak będzie wyglądała sytuacja w przypadku wielokrotnych pierwiastków równania charakterystycznego. Wzmocnijmy nasze twierdzenie:

Twierdzenie 1.2. *Rozwiązaniem ogólnym równania (1.1) jest funkcja zadana wzorem:*

$$\begin{aligned} x_n &= \left(c_{11} + nc_{12} + \ldots + n^{r_1-1}c_{1r_1}\right)(y_1)^n + \ldots \\ &\quad + \left(c_{s1} + nc_{s2} + \ldots + n^{r_s-1}c_{sr_s}\right)(y_s)^n, \end{aligned}$$

gdzie y_i są pierwiastkiami zespolonymi równania charakterystycznego (1.2) krotności r_i, $i \in \{1, \ldots, s\}$, a $r_1 + \ldots + r_s = k$.

Za tym skomplikowanym zapisem kryje się dosyć prosta zasada – zamiast stałej mamy wielomiany stopnia krotności pierwiastka pomniejszonej o jeden. Zilustrujmy to przykładem.

Przykład 1.2. Dane jest równanie:

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 1, \\ x_{n+2} = -2x_{n+1} - x_n. \end{cases}$$

Ponownie nasza przygoda rozpocznie się od wyznaczenia równania charakterystycznego:

$$y^2 + 2y + 1 = 0,$$

co sprowadza się do $(y+1)^2 = 0$. Podwójny pierwiastek -1 sugeruje poniższą postać:

$$x_n = (c_{11} + nc_{12})(-1)^n.$$

Ostatnim krokiem jest wyznaczenie stałych c_{11} oraz c_{12}, co czynimy, rozwiązując poniższy układ równań:

$$\begin{cases} 0 = (c_{11} + 1 \cdot c_{12})(-1)^1, \\ 1 = (c_{11} + 2 \cdot c_{12})(-1)^2, \end{cases}$$

którego rozwiązaniem są $c_{11} = -1$ wraz z $c_{12} = 1$. A zatem mamy nasze rozwiązanie: $x_n = (n-1)(-1)^n$.

Kolejnym etapem na drodze do rozwiązywania układów równań rekurencyjnych są równania **niejednorodne**. Przedstawmy je zatem.

Definicja 1.3. Niejednorodnym liniowym równaniem rekurencyjnym rzędu k o stałych współczynnikach będziemy nazywać równanie postaci:

$$x_{n+k} = a_{k-1}x_{n+k-1} + \ldots + a_1 x_{n+1} + b_n, \tag{1.3}$$

gdzie $b\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ jest dowolnym ciągiem liczb rzeczywistych (lub zespolonych; $b\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$).

Rozwiązanie równania (1.3) można przedstawić jako sumę[4]:

$$x_n = p_n + q_n,$$

gdzie p_n jest rozwiązaniem ogólnym równania jednorodnego, a q_n pewnym szczególnym rozwiązaniem równania niejednorodnego równania (1.3). Proces wyznaczania x_n będzie przebiegał dwuetapowo: uprzednio wyznaczymy rozwiązanie ogólne odpowiadającego jednorodnego równania różnicowego, a następnie znajdziemy pewne rozwiązanie szczególne. Jak poprzednio, warto podeprzeć to rozumowanie przykładem.

Przykład 1.3. Rozważmy równanie postaci:

$$x_{n+3} = 13x_{n+1} - 12x_n + 2^n.$$

Wielomianem charakterystycznym odpowiadającego równania jednorodnego jest:

$$y^3 - 13y + 12 = 0$$

[4]Formalnie jest to twierdzenie wymagające dowodu.

o pierwiastkach $y_1 = -4$, $y_2 = 1$, $y_3 = 3$. Zatem $p_n = c_1(-4)^n + c_2 + c_3 3^n$. Przewidujemy postać q_n jako $q_n = c2^n$; naszym celem będzie wyznaczenie stałej c. Wstawiając do zadanego równania tę postać, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} c \cdot 2^{n+3} &= 13c \cdot 2^{n+1} - 12c \cdot 2^n + 2^n, \\ 8c \cdot 2^n &= 26c \cdot 2^n - 12c \cdot 2^n + 2^n, \\ 2^n(8c - 26c + 12c - 1) &= 0, \\ 2^n(-1 - 6c) &= 0, \end{aligned}$$

z czego otrzymujemy $c = -\frac{1}{6}$. Rozwiązaniem zadanego równania jest ostatecznie $x_n = c_1(-4)^n + c_2 + c_3 3^n - \frac{1}{6} \cdot 2^n$.

Zauważmy, że sytuacja się skomplikuje nieco, gdy część niejednorodna będzie postaci $(y_0)^n$, gdzie y_0 jest pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego, np.:

$$x_{n+3} = 13x_{n+1} - 12x_n + 3^n.$$

Wówczas musimy przewidywać postać q_n jako $q_n = c3^n + d \cdot n3^n$. Podobnie rzecz będzie się mieć z wyższymi krotnościami – występuje tu pełna analogia między liniowymi równaniami różniczkowymi zwyczajnymi.

Przejdźmy teraz do równań rzędu pierwszego, jednakże wielu ciągów.

Definicja 1.4. Układem r jednorodnych liniowych równań rekurencyjnych pierwszego rzędu nazywamy układ równań postaci:

$$\begin{cases} x_{n+1}^{(1)} = a_{11}x_n^{(1)} + \ldots + a_{1r}x_n^{(r)}, \\ \vdots \\ x_{n+1}^{(r)} = a_{r1}x_n^{(1)} + \ldots + a_{rr}x_n^{(r)}. \end{cases} \tag{1.4}$$

Narzuca się wprowadzenie **macierzy współczynników**:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & \ldots & a_{rr} \end{bmatrix}.$$

Jeżeli domyślacie się już, jak będzie przebiegała dalsza część, proponuję odłożyć w tym miejscu lekturę i wypracować resztę samodzielnie. Jeśli jednak jesteście niecierpliwi, już objaśniam, co dalej należy zrobić. Nie obejdzie się bez wyliczania **wartości własnych** macierzy A. Żeby nie plątać się w symbolach, rozpoczniemy od kolejnego przykładu, który będzie zawierać metodę postępowania dla przypadku, w którym wartości własne są jednokrotne.

Przykład 1.4. Rozważmy układ:

$$\begin{cases} x_{n+1}^{(1)} = x_n^{(1)} + 2x_n^{(2)}, \\ x_{n+1}^{(2)} = 3x_n^{(1)}. \end{cases}$$

gdzie indeksy górne numerują kolejne ciągi. Nasza macierz współczynników jest postaci:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Obliczmy $\det(A - \lambda I)$ i przyrównajmy do zera, czyli innymi słowy wyszukajmy wartości własnych macierzy A:

$$0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 6.$$

Pierwiastkami tego wielomianu są liczby $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 3$. Szukamy wektora $C^{(1)} = [c_1, c_2]^T$ stanowiącego pewne nietrywialne rozwiązanie układu $(A - I\lambda_1)C^{(1)}$:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Otrzymujemy $2c_2 = -3c_1$ – wektor własny jest postaci $C^{(1)} = C_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ dla pewnej stałej C_1. Rozwiązanie odpowiadające tej wartości własnej przedstawia się zatem jako:

$$C_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} \cdot (-2)^n.$$

Podobnie działamy dla λ_2, uzyskując wektor rozwiązania:

$$C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot 3^n.$$

Są to dwa liniowo niezależne rozwiązania[5], rozwiązanie ogólne będzie ich sumą. Zapiszmy macierz rozwiązania złożoną z wektorów rozwiązań

[5]Metoda ta zapewnia wyznaczenie wszystkich rozwiązań liniowo niezależnych; po raz kolejny jest to fakt wymagający dowodu.

wypisanych kolumnami:

$$\begin{bmatrix} x_n^{(1)} \\ x_n^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2C_1 & C_2 \\ -3C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-3)^n \\ 2^n \end{bmatrix}.$$

Możemy teraz odczytać nasze rozwiązanie jako układ:

$$\begin{cases} x_n^{(1)} = 2C_1 \cdot (-2)^n + C_2 \cdot 3^n, \\ x_n^{(2)} = -3C_1 \cdot (-2)^n + C_2 \cdot 3^n. \end{cases}$$

Algorytm można uogólnić, zastępując liczby symbolami. W przypadku wartości własnych krotności r wektory własne (dla układu s równań) są postaci:

$$\begin{bmatrix} c_{11} + nc_{12} \ldots + n^{r-1}c_{1r} \\ \vdots \\ c_{s1} + nc_{s1} + \ldots + n^{r-1}c_{sr} \end{bmatrix}.$$

co, niestety, wymaga większego wysiłku obliczeniowego.

Mam nadzieję, że przedstawione metody okazały (okażą?) się pomocne. Następnym razem zajmiemy się funkcjami specjalnymi w kontekście transformaty Fouriera.

Zadania

Dla chcących utrwalić swoją wiedzę zamieszczam parę zadań:

Zadanie 1.1. Rozwiązać równanie $a_{n+2} + a_{n+1} - 132a_n = 0$.

Zadanie 1.2. Rozwiązać równanie $b_{n+1} - D^2 b_{n-1} = 0$, gdzie D jest pewną stałą rzeczywistą dodatnią.

Zadanie 1.3. Wyznaczyć rozwiązanie układu:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 5 \\ x_{n+2} = 5x_{n+1} - 6x_n \end{cases}$$

Zadanie 1.4. Rozwiązać równanie $y_{n+3} - 6y_{n+2} + 12y_{n+1} - 8y_n = 0$.

Zadanie 1.5. Wyznaczyć rozwiązanie układu:

$$\begin{cases} x_{n+1}^{(1)} = -x_n^{(2)} + x_n^{(3)} \\ x_{n+1}^{(2)} = -x_n^{(1)} + x_n^{(3)} \\ x_{n+1}^{(3)} = x_n^{(1)} - x_n^{(2)} + 4x_n^{(3)} \end{cases}$$

Zadanie 1.6. Znaleźć równanie rekurencyjne oraz wartości początkowe dla tego równania, którego rozwiązaniem jest $x_n = \cos\frac{n\pi}{2} + i\sin\frac{n\pi}{2}$.

Odpowiedzi do powyższych zadań zamieszczone są na ostatniej stronie.

[Kącik łamania głowy]

Zapewne większość z Was (jeśli nie wszyscy) spotkała się kiedyś z sudoku. Była to swego czasu szalenie popularna łamigłówka, a niejeden z nas do tej pory próbuje w ten sposób rozgrzać szare komórki.

Jednak nie jest to jedyny sposób trenowania logicznego myślenia. Przeciwnie – istnieje olbrzymia ilość zadań podobnego typu, których samo wymienienie zajęłoby sporo miejsca.

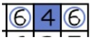
Zajmiemy się tutaj jednym z mniej znanych krewniaków słynnego sudoku. Przed Państwem hitori:

9	8	6	6	4	6
9	5	4	6	3	7
4	8	3	1	2	8
1	7	7	5	4	9
4	4	9	1	7	8
7	2	6	4	3	3

Jego zasady są bardzo proste. Trzeba zamalować część kratek tak, aby spełnione były warunki:

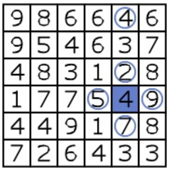
- w niezamalowanych polach (będziemy je nazywać po prostu białymi) cyfry nie mogą się powtarzać w rzędach i kolumnach – tak jak w sudoku;
- dwa sąsiadujące pola (stykające się bokiem) nie mogą być zamalowane;
- białe pola muszą tworzyć spójny obszar.

Spróbujmy uporać się z tym zadaniem. Spójrzmy na układ 6-4-6 w pierwszym rzędzie. Co by się stało gdybyśmy zamalowali czwórkę?



Ponieważ nie możemy mieć obok siebie dwóch zamalowanych pól, wszystkie pola sąsiadujące z czwórką muszą być białe. Z drugiej strony, otrzymujemy dwie białe szóstki w tym rzędzie, a taka sytuacja jest niedozwolona. Dlatego w układzie X-Y-X pole Y zawsze będzie niezamalowane.

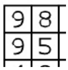
Możemy zatem pole z cyfrą 4 zaznaczyć jako białe. Musimy więc zaczernić inną czwórkę, która znajduje się w tej samej kolumnie:



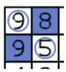
Zostańmy jeszcze na chwilę w pierwszym rzędzie i skupmy się na polach z szóstkami. Oznaczając narożne pole jako białe, ponownie dochodzimy do sprzeczności:

Zatem jeżeli mamy parę sąsiadujących pól z taką samą cyfrą, wszystkie jej pozostałe powtórzenia w danym rzędzie lub kolumnie należy zamalować.

Jeżeli taka para pojawi się w narożniku, jesteśmy w stanie uzyskać jeszcze jedną informację. Spójrzmy na taki układ:

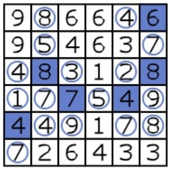


Zamalowanie ósemki pociąga za sobą następującą sytuację:

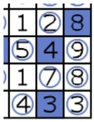


Jednak białe pola muszą tworzyć spójny obszar, a narożne pole jest odcięte od pozostałych. Stąd wiemy, że pole z cyfrą 8 musi pozostać niezamalowane. Podobne rozumowanie przeprowadzamy w prawym dolnym rogu.

Po kilku prostych krokach powinniśmy dojśc do mniej więcej takiego etapu:

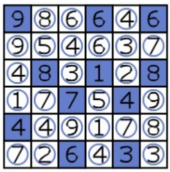


Zwróćmy uwagę na pierwszą kolumnę z prawej. Żeby nie „zablokować” pola z cyfrą 7, trójka musi być biała. To pociąga za sobą konieczność zamalowania odpowiedniego pola w ostatnim rzędzie:



Aby nie odciąć drogi białym polom z prawej dolnego rogu, niższa z jedynek nie może być zamalowana. Trzeba więc zaczernić drugą z nich.

Od tego momentu dokończenie zadania powinno być bardzo proste. Rozwiązana łamigłówka wygląda tak:



Zaprezentowaliśmy kilka podstawowych zasad rozwiązywania hitori. Oczywiście przy trudniejszych przykładach mogą one nie wystarczyć, ale przy odrobinie cierpliwości można wypracować bardziej wyszukane techniki.

Na zakończenie dla wszystkich chcących przetestować swoje zwoje mózgowe dołączam odrobinę większy, lecz również całkiem łatwy przyklad.

4	5	1	2	8	1	6	2	4
5	6	2	5	9	7	4	8	1
1	7	5	1	6	2	5	7	3
9	8	1	7	3	9	2	1	5
7	5	3	2	7	6	1	3	9
8	1	7	4	2	5	6	4	8
2	6	4	3	4	1	7	9	8
3	2	1	9	1	3	5	8	3
3	7	6	1	9	4	8	5	7

Poprawność rozwiązania można sprawdzić pod adresem `http://puzzlepicnic.com/puzzle?4409`. Tam także znajdziecie więcej zadań – także tych trudniejszych.

Zbigniew Laskowski

[Zbiórka mikołajkowa]

Jak co roku, Koło Naukowe Matematyków organizuje zbiórkę świąteczną. Tym razem dary otrzymają podopieczni świetlicy środowiskowej św. Wojciecha przy ul. Chopina w Katowicach. Zbieramy:

- artykuły szkolne (zeszyty, kredki, długopisy itp.);
- kosmetyki;
- słodycze;
- zabawki.

Dary można wkładać do koszy umiejscowionych przy portierniach w Instytucie Matematyki UŚ lub bezpośrednio do pokoju KNM (524). Dary zbieramy od poniedziałku, 15 grudnia 2014, do czwartku, 18 grudnia 2014.

[Odpowiedzi]

Poniżej znajdują się odpowiedzi do zadań z kącika technicznego.

Zadanie 1.1. $a_n = c_1 \cdot (-12)^n + c_2 \cdot 11^n$

Zadanie 1.2. $b_n = c_1 \cdot D^n + c_2 \cdot (-D)^n$

Zadanie 1.3. $x_n = -2^n + 3^n$

Zadanie 1.4. $y_n = c_1 \cdot 2^n + c_2 \cdot n2^n n + c_3 \cdot n^2 2^n$

Zadanie 1.5.

$$\begin{cases} x_n^{(1)} = c_1 \cdot (-1)^n + c_2 + c_3 \cdot 4^n \\ x_n^{(2)} = c_1 \cdot (-1)^n - 2c_2 + c_3 \cdot 4^n \\ x_n^{(3)} = -c_2 + 5c_3 \cdot 4^n \end{cases}$$

Zadanie 1.6.

$$\begin{cases} x_1 = i \\ x_2 = -1 \\ x_{n+2} = -x_n \end{cases}$$

[Stopka redakcyjna]

Redaktor naczelny: Mateusz Szymański
Autorzy artykułów: Martyna Biskup, Zbigniew Laskowski, Mateusz Szymański, Joanna Zwierzyńska
Skład i łamanie w LaTeX: Marcin Jenczmyk

Kontakt z redakcją bezpośrednio w pokoju KNM (p.524)
lub elektronicznie: macierzator@knm.katowice.pl

Wszystkie archiwalne numery [MACIERZATORA] dostępne są również w wydaniu elektronicznym na stronie internetowej KNM UŚ: `www.knm.katowice.pl`. Wydanie elektroniczne [MACIERZATORA] posiada numer ISSN: 2083-9774.

grudzień 2014