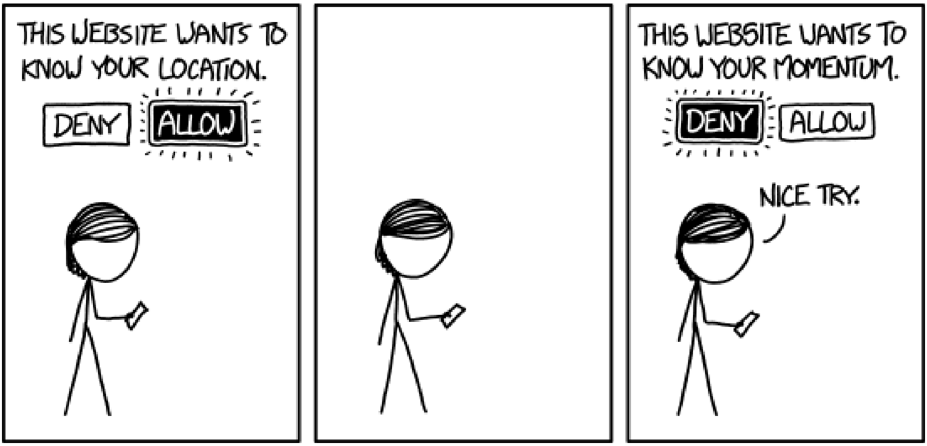
[MACIERZATOR58]

Gazetka redagowana przez Koło Naukowe Matematyków Uniwersytetu Śląskiego



Witamy w zimowym numerze [MACIERZATORA]!

Rozpoczynający się semestr otwieramy kolejnym numerem naszej gazetki. Tym razem proponujemy Czytelnikom esej o poziomach nieistnienia, drugą część artykułu o algorytmach pozwalających na mnożenie wielomianów oraz dalsze rozważania o „miękkiej" i „twardej" analizie. Pokażemy też, jak za pomocą twierdzenia Borsuka–Ulama rozwiązać pewien problem dotyczący dwóch całek i przedstawimy krótkie podsumowanie The 11^{th} International Students' Conference on Analysis.

A na zakończenie – matematyczna krzyżówka!

Interesującej lektury oraz dobrego nowego semestru

życzy Redakcja

[Poziomy nieistnienia]

Do podstawowych zadań matematyka wprowadzającego mniej lub bardziej abstrakcyjny matematyczny byt należy stwierdzenie jego istnienia. I tu spodziewać się możemy jednej z dwóch możliwości: „tak" albo „nie", po której matematyk będzie kontynuować swoje badania lub też – zrezygnowany – zajmie się czymś innym. Skąd zatem absurdalna sugestia, by porównywać skalę istnienia i do wachlarza odpowiedzi dodać „stanowcze tylko trochę"? Nie ukrywam, że dziś przenikniemy raczej przez *sui generis* filozofię matematyki i operować będziemy ludzką intuicją częściej niż logiką, od której mimo wszystko zaczniemy.

Przede wszystkim, warto zastanowić się, co rozumiemy poprzez słowo „istnieć" i spojrzeć na kwantyfikator $\exists$, który pomoże określić sens matematycznej egzystencji obiektu. Nieformalnie, obiekt o cechach $P(x)$ (P jest funkcją zdaniową[1]) istnieje, jeżeli wyrażenie

$$\exists_x \ P(x) \tag{1}$$

jest zdaniem prawdziwym. Możemy myśleć również w inny sposób: obiekt matematyczny istnieje, jeżeli jego wprowadzenie nie prowadzi do sprzeczności. Innymi słowy, x nie istnieje, jeżeli zakładając (1), możemy wyprowadzić zarówno zdanie prawdziwe, jak i jego zaprzeczenie. Te dwa podejścia różnią się pewną subtelnością, którą zilustrujemy poniższym przykładem.

W aksjomatyce zbiór Zermelo-Fraenkela z pewnikiem wyboru (dalej: ZFC) rozważmy wyrażenie:

$P(A)$ – A jest nieprzeliczalnym zbiorem mocy mniejszej od continuum, tj. $\aleph_0 < |A| < 2^{\aleph_0}$.

Ponieważ zbiorów A o powyższej własności nie potrafimy znaleźć, postulujemy **nieistnienie** nieprzeliczalnego zbioru o mocy silnie mniejszej od mocy zbioru liczb rzeczywistych. Żądanie to nazywane jest **hipotezą continuum** (skrót: CH), która okazuje się niezależna od aksjomatyki ZFC. Oznacza to, iż nie można udowodnić hipotezy continuum ani jej obalić (udowodnić jej zaprzeczenie) przy aksjomatach ZFC. W takim wypadku P nie jest zdaniem, ponieważ nie możemy przypisać żadnej wartości logicznej. Jednakże wprowadzenie obiektu A o takich własnościach (czyli założenie

[1] Podczas tego artykułu będziemy rozumieć słowo „zdanie" w naiwny sposób – wyrażenie przyjmujące wartość logiczną 0 lub 1.

jego istnienia) nie prowadzi do sprzeczności: jeżeli aksjomatyka ZFC jest niesprzeczna, ZFC + CH również pozostaje niesprzeczne.

W przypadku jak powyżej zdanie (1) dołączamy do aksjomatów, a więc zakładamy istnienie stosownego x. Na ogół założenie egzystencjalne nie pozwala wywynioskować innych cech x. Przykładowo, jeżeli założymy $\neg$ CH, a więc wprowadzimy nieprzeliczalny zbiór A o mocy mniejszej niż $2^{\aleph_0}$, możemy spytać, czy istnieje pierścień przemienny R o mocy $|A|$. W ZFC odpowiedź na to pytanie jest pozytywna, jednakże struktura wewnętrzna R jest dla nas pewną czarną skrzynką. Co ciekawe, możemy „skonstruować" ze zbioru szukany pierścień, co będzie istotnie lepszym rozwiązaniem aniżeli założenie istnienia takiego pierścienia, gdyż z konstrukcji wynikać będą niektóre własności, których nie potrafilibyśmy wydedukować jedynie z faktu istnienia tej struktury algebraicznej na zbiorze A.

Rozważmy pierścień przemienny wielomianów o współczynnikach całkowitych $\mathbb{Z}[A]$, gdzie zmienne są ze zbioru A (taki pierścień jest dobrze zdefiniowany nawet dla nieskończonego zbioru zmiennych). Pierścień ten jest sumą mnogościową wszystkich pierścieni przemiennych wielomianów skończonej liczby zmiennych ze zbioru A. Nie wdając się w rachunki, można pokazać, że moc pierścienia przemiennego $R[X]$ o współczynnikach z pierścienia R i zmiennych ze zbioru nieskończonego X wynosi:

$$|R[X]| = \max\{|R|, |X|\}.$$

a więc, skoro $\max\{|\mathbb{Z}|, |A|\} = |A|$, pierścień $\mathbb{Z}[A]$ jest szukanym pierścieniem. Do zbadania innych cech tego pierścienia możemy teraz wykorzystać wiedzę na temat pierścieni wielomianów.

Wróćmy jednak do definicji istnienia. Wyobraźmy sobie sytuację, w której oba zdania: *istnieje x o własności P* oraz *istnieje x o własności $\neg P$* są niezależne od ZFC. Chociaż wprowadzenie ani jednego, ani drugiego obiektu nie prowadzi do sprzeczności (a więc, używając zaproponowanej definicji, istnieją), postulowanie istnienia obu z nich stanowi sprzeczność. Widać tym samym, że w istocie za każdym rozważamy osobno zdanie ZFC +(1) *jest niesprzeczne* (przy założeniu niesprzeczności ZFC).

Jakościową zmianą przy dołączaniu nowego aksjomatu jest zażądanie jedyności wprowadzanego obiektu (oczywiście, o ile to nie prowadzi do sprzeczności) lub nałożenie dodatkowych warunków, które w pewnym sensie stanowią konstrukcję struktury matematycznej. W ten sposób można m.in. utworzyć aksjomatyczną definicję zbioru liczb rzeczywistych.

Na ogół jesteśmy w stanie stwierdzić, czy obiekt istnieje: podać dowód (1). Dalej, zamiast dookreślać P, posługiwać będziemy się zdaniami opisowymi. Zaczniemy od prostego przykładu.

Definicja. Liczbę naturalną, która jest sumą wszystkich swych dzielników mniejszych od niej, nazywamy **liczbą doskonałą**.

Pierwsze pytanie, które należy sobie zadać przed badaniem właściwości liczb doskonałych, powinno brzmieć: czy istnieje jakakolwiek liczba doskonała? By przekonać się, że obiekt opisywany w definicji istnieje, często wystarczy takowy wskazać i sprawdzić, iż rzeczywiście spełnia warunki definicji. W tym przypadku nietrudno się przekonać, że $6 = 1 + 2 + 3$ jest szukaną liczbą, co szumnie możemy nazwać dowodem istnienia liczb doskonałych.

Wskazanie konkretnego obiektu (tj. jednoznacznie) o żądanych własnościach jest bardzo komfortową sytuacją, w której poza własnością wyróżniającą P, efektywnie jesteśmy w stanie określić inne własności. Czasami jednak jest to albo trudne, albo wręcz niemożliwe. Zaczniemy od skrajnego przypadku, w którym nie możemy „wskazać palcem" szukanego obiektu – gdy on nie istnieje.

Definicja. Element maksymalny zbioru $\mathbb{R}$ z porządkiem naturalnym nazywamy **liczbą ponurą**.

Prosta rzeczywista nie posiada elementu maksymalnego, więc nie istnieją ponure liczby w tym zbiorze. Nie wiedząc o tym fakcie, możemy wykazać konieczne własności, które wynikają z nałożonego warunku: możemy np. stwierdzić, że gdyby liczba ponura istniała, byłaby tylko jedna – w porządkach liniowych element maksymalny jest elementem największym, który jest wyznaczony jednoznacznie.

Badanie własności obiektu, o którym nie wiadomo nawet, czy istnieje, wydaje się dosyć groteskową sytuacją. Gdy wśród matematyków podejrzewa się, że nie ma x o własności P, jedną z „taktyk" jest kolekcjonowanie wydedukowanych własności x w nadziei na to, że któreś dwie okażą się wykluczające[2].

Definicja obiektu może być uzależniona od innego obiektu, na przykład abstrakcyjnej przestrzeni.

Definicja. Dwa wektory $u, v \in H$, gdzie H jest przestrzenią liniową z iloczynem skalarnym, nazywamy **prostopadłymi**, jeżeli $\langle u, v\rangle = 0$.

[2] Dla przykładu wiadomo, iż nieparzysta liczb doskonała musi spełniać nieprawdopodobne warunki, m.in. jest większa od 10^{1500} oraz posiada co najmniej 101 czynników pierwszych (niekoniecznie różnych).

Możemy dla takiego przypadku spytać, czy istnieje przestrzeń unitarna (czyli z abstrakcyjnym iloczynem skalarnym), w której istnieją dwa prostopadłe do siebie wektory lub postawić problem ogólniej: czy dla każdej przestrzeni unitarnej[3] możemy znaleźć dwa wektory prostopadłe. Nawet w ogólnym przypadku wystarczy podać parę wektorów zerowych (a mamy pewność, że takie w przestrzeni liniowej istnieją i są jedyne; są w pewnym sensie namacalne dzięki swojej jednoznaczności określenia).

Czasami niemożliwe jest bezpośrednie podanie obiektu, który realizuje zadane żądania, natomiast możliwe jest skonstruowanie takiego z innego obiektu. Jesteśmy w stanie wykazać, że w każdej przestrzeni unitarnej H o wymiarze $\dim H \geqslant 2$ jesteśmy w stanie znaleźć prostopadłe **niezerowe wektory** i podać „przepis" na nie.

Niech H będzie przestrzenią unitarną. Niech $x, y \in H$ będą liniowo niezależnymi wektorami przestrzeni H. Takie istnieją, ponieważ $\dim H \geqslant 2$. Wprowadźmy

$$z = x - \frac{y}{\langle y, y\rangle}\langle x, y\rangle.$$

Pokażemy, że z jest prostopadłe do y, wyznaczając wartość iloczynu skalarnego między nimi.

$$\begin{aligned}\langle z, y\rangle &= \langle x - \frac{y}{\langle y, y\rangle}\langle x, y\rangle, y\rangle = \langle x, y\rangle - \langle \frac{y}{\langle y, y\rangle}\langle x, y\rangle, y\rangle \\ &= \langle x, y\rangle - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}\langle y, y\rangle = \langle x, y\rangle - \langle x, y\rangle = 0.\end{aligned}$$

Niestety mimo szczerych chęci nie jest to pełnoprawna konstrukcja. Skorzystaliśmy z faktu, iż istnieją dwa liniowo niezależne wektory, jednakże dowód tego faktu opiera się na dowodzie nie wprost: przypuśćmy wbrew założeniu, że wszystkie wektory są liniowo zależne. To oznacza, że H jest przestrzenią liniową wymiaru co najwyżej 1. Sprzeczność.

Z prawa wyłączonego środka – $\neg p \vee p$ – twierdzimy, że jeżeli nieistnienie obiektu prowadzi do sprzeczności, to musi on istnieć – argument ten jest jednak niekonstruktywny: nie podaje sposobu na to, by go wyznaczyć.

Na ogół dowody wprost wymagają znacznie większego wysiłku niż te niekonstruktywne. Dla postawionego wyżej problemu dotyczącego istnienia

[3] Uwaga! Milcząco założyliśmy, że istnieje chociaż przestrzeń liniowa z iloczynem skalarnym! Kwantyfikator ogólny $\forall$ nie pociąga za sobą szczególnego $\exists$ przebiegającego ten sam zbiór (klasę) w jednym przypadku: gdy zbiór ten jest pusty.

niezerowych prostopadłych wektorów rozwiązanie staje się konstruktywne, gdy dana jest baza przestrzeni liniowej – w przypadku skończenie wymiarowym jest to zawsze możliwe. Przy założonym pewniku wyboru prawdziwe jest natomiast stwierdzenie, iż każda przestrzeń liniowa ma bazę, zatem kuszące jest wybranie dwóch wektorów z bazy i zortogonalizowanie ich. Jednakże w tym wypadku napotykamy inny typ niekonstruktywności, który związany jest z naturą pewnika wyboru.

Dowód wykorzystujący pewne formy pewnika wyboru nazywa się **nieefektywnym**. Ze zbiorów, których dowód istnienia wymaga pewnika wyboru, na ogół nie da się wybrać jawnie ani jednego punktu, dla funkcji podobnie uzyskanych nie istnieje sposób wyznaczania wartości w zadanym punkcie[4]. Klasycznym przykładem obiektów pozyskanych tą metodą są zbiory niemierzalne w sensie Lebesgue'a w $\mathbb{R}^n$, rozszerzenia ograniczonych funkcjonałów liniowych z podprzestrzeni do całej przestrzeni unormowanej (twierdzenie Hahna-Banacha) czy sumy pewnego łańcucha maksymalnego (lemat Kuratowskiego-Zorna). Warto zaznaczyć, iż niemożność określenia pewnych cech obiektu uzyskanego nieefektywnie w żaden sposób nie jest rezultatem braku naszych umiejętności: jest to, być może nieintuicyjna, konsekwencja wprowadzonych aksjomatów.

Zatrzymajmy się na moment przy zbiorach niemierzalnych. Możemy się przekonać, iż zakładając **aksjomat determinacji**, który implikuje zaprzeczenie pewnika wyboru, wszystkie zbiory na prostej rzeczywistej są mierzalne. Zatem na tej samej prostej rzeczywistej w zależności od przyjętego aksjomatu, pewne zbiory nam „znikają" lub „przybywają". Niematematycznie można zadać sobie pytanie, czy wraz ze zbiorami znikają też ich elementy, czy może zbiór potęgowy prostej rzeczywistej ulega zmianie: w każdym razie mamy do czynienia w obu przypadkach z innym obiektem, którego charakter nie jest do końca jasny.

Pewne własności obiektów, nawet tych, z którymi matematyk pracuje na co dzień, pozostają nieuchwytne. Rozważmy znaną funkcję e^x, naszym zadaniem będzie opisanie wartości tej funkcji. Na pierwszy rzut oka sprawa wydaje się błaha, jednakże w gruncie rzeczy znamy niewiele wartości tej funkcji.

Powszechnie znany jest fakt[5], iż zbiór liczb rzeczywistych jest liczniejszy od zbioru liczb wymiernych, a nawet – algebraicznych, tj. liczb będących pierwiastkami wielomianu o współczynnikach wymiernych. O ile Czytelnik zapewne mógłby spędzić godziny, wyliczając różne liczby wymierne,

[4]Gdyby taki sposób istniał, uzyskalibyśmy konstruktywny dowód istnienia – poprzez określenie wartości w każdym punkcie.

[5]Słowo „fakt" użyte w tym kontekście jest nadużyciem.

„wskazanie palcem" nieprzeliczalnej ilości liczb[6] niewymiernych – każdej z osobna – jest kłopotliwe. Liczby niewymierne, którymi operujemy, na ogół wpadają do znanych klas, np. logarytmów naturalnych liczb wymiernych, pierwiastków stopnia naturalnego czy wielokrotności stałych takich jak π czy e. Praktycznie cała prosta rzeczywista jest pod tym względem dla nas nieznana: potrafimy operować danymi, które są co najwyżej przeliczalne[7] – to prowadzi do pojęcia liczb obliczalnych. Obserwujemy więc, że nawet na zbiorze liczb rzeczywistych operujemy jedynie wycinkiem; podobnie jest w przestrzeni funkcji ciągłych.

Na szczęście informacje o wszystkich wartościach nie są nam potrzebne, by określić większość interesujących nas własności. Co więcej, można wręcz uznać, że pełna wiedza o badanym obiekcie jest nawet niewskazana: najczęściej problemem jest wyodrębnienie z szumu własności tych zależności, które są istotne dla problemu. Tego typu trudności szczególnie widoczne są w teorii liczb, gdzie mamy wręcz nadmiar informacji.

W powszechnie akceptowanej aksjomatyce Zermelo-Fraenkela podstawowym pojęciem jest pojęcie zbioru. Gdy przypatrzymy się bliżej, zauważymy, że nigdzie w ramach tego, mówiąc luźno, matematycznego frameworka, nie określa się pojęć takich jak liczba czy punkt (które mimowolnie utożsamiamy z elementem jakiegoś zbioru): matematyczna pedanteria nakazuje traktować je jak zbiory, by nie operować obiektami, których typ (kategoria) jest nieustalony. Aksjomaty teorii mnogości nie opisują żadnych zależności innych obiektów niż zbiory – w szczególności nieuprawniony jest wniosek *nie istnieją inne obiekty niż zbiory* – przykładem obiektu matematycznego, który nie jest zbiorem, jest **klasa właściwa**. Możemy oczywiście sformalizować i to pojęcie, jednakże nie możemy sobie w żaden sposób zagwarantować, że nie zajdzie potrzeba użycia nowego pojęcia, który wymyka się postulowanym aksjomatom; w tym sensie matematyka pozostaje otwartą dyscypliną umysłu.

Wróćmy jednak do liczb rzeczywistych. O ile utożsamienie liczb naturalnych ze zbiorami zaproponowane przez von Neumanna

$$0 = \emptyset, \quad 1 = \{\emptyset\}, \quad 2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \ \ldots$$

wydaje się w miarę rozsądne, potraktowanie liczby π w ten sposób w żadnym razie nie pomaga badać własności algebraicznych tej liczby. Innymi

[6]Uwaga językowa: na ogół powinno się używać określenia liczba liczb zamiast ilość – ze względu na kwestię policzalności. Tutaj nieprzeliczalność została potraktowana jako niepoliczalność.

[7]Tym samym szeregi liczbowe/funkcyjne czy bazy ortonormalne pomagają nam „zakodować" inne obiekty bez wychodzenia poza przeliczalną nieskończoność.

słowy już w tym momencie postulujemy istnienie obiektów, których charakter określony przez przyjęte ramy teorii mnogości, jest niejasny i niejawny – godzimy się na ten stan rzeczy, gdyż **arbitralne** ustanowienie elementów π jako zbioru nie determinuje algebraicznych własności tej liczby, które są esencją rozważań nad nią.

Na zakończenie możemy określić pewne „poziomy istnienia” ze względu na informację, którą ze sobą niosą:

1. x jest szukanym obiektem o własności P,
2. zbiór elementów o własności P jest niepusty,
3. nieistnienie elementu o własności P prowadzi do sprzeczności,
4. istnienie elementu o własności P nie prowadzi do sprzeczności.

W drugim punkcie nadmieńmy, iż dowód niepustości nie może być ani nieefektywny, ani nawet nie wprost, byśmy faktycznie mogli mówić o takiej sytuacji. Przykładowo ze stwierdzeń: *zbiór* $B \subseteq \mathbb{R}$ *jest nieprzeliczalny* oraz *zbiór* $B \subseteq \mathbb{R}$ *ma miarę Lebesgue'a* 1 wnioskujemy niepustość. I chociaż rozumowanie tego typu wydaje się przesadą, bywa czasem użyteczne.

Niezależnie od naszych starań informacja o obiektach matematycznych jest niepełna, jak zdążyliśmy zauważyć żądanie konstruktywnego dowodu istnienia może być matematyczną niemożliwością. Charakteru „informatycznej niedostępności” obiektu x nie da się wywnioskować jedynie z prawdziwości/fałszywości zdania (1).

PS Artykuł mógł przyjąć dualną nazwę: „Poziomy istnienia”, jednakże w obecnej formie akcentuje swego rodzaju „nieuchwytność” pewnych obiektów.

Mateusz Szymański

[O metodach mnożenia wielomianów]

Część druga

W listopadowym numerze [MACIERZATORA] można było przeczytać pierwszą część artykułu o algorytmach pozwalających na mnożenie wielomianów. Opisane zostały w niej zarówno „naiwne” rozwiązanie, jak i rekurencyjny algorytm Karatsuby. Innym podejściem do problemu mnożenia wielomianów jest wykorzystanie faktu, że wielomian n-tego stopnia jest wyznaczony jednoznacznie przez wartości w $n+1$ punktach. Wobec tego mnożenia dwóch wielomianów f i g n-tego stopnia można dokonać w następujący sposób:

- wyznaczyć wartości wielomianów f, g w $2n+1$ różnych punktach $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots, x_{2n}$,
- dokonać mnożenia $h(x_k) = f(x_k) \cdot g(x_k)$, $k = 0, 1, \dots, 2n$,
- interpolować wielomian h na podstawie wartości $h(x_0), \dots, h(x_{2n})$.

Napotykamy tu jednak pewne problemy:

- wyznaczenie wartości wielomianu w pojedynczym punkcie ma złożoność przynajmniej $\Theta(n)$ (np. schemat Hornera) - wyznaczenie wartości wielomianu w n (lub $2n+1$) punktach będzie miało złożoność $\Theta(n^2)$;
- interpolacja wielomianowa ma (na ogół) złożoność również rzędu $\Theta(n^2)$;

więc (o ile nie uda się wyznaczyć wartości wielomianu i dokonać jego interpolacji w czasie krótszym niż $\Theta(n^{\log_2 3})$, czyli równym złożoności algorytmu Karatsuby), nie polepszy to w żadnym stopniu szybkości rozwiązania.

Na szczęście taki sposób istnieje. Oznaczmy przez ω_N n-ty pierwiastek zespolony z 1, tzn. $\omega_N = e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{N}}$. Dyskretną transformatą Fouriera (DFT) nazywamy przekształcenie ciągu $(a_j)_{j=0,\dots,N-1}$ w ciąg $(\widehat{a}_j)_{j=0,\dots,N-1}$ zadane wzorem

$$\widehat{a}_j = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \omega_N^{jk}.$$

Zauważmy, że wzór opisujący $\widehat{a}_j$ jest również wzorem pozwalającym na wyliczenie wartości wielomianu o współczynnikach a_i, $i = 0, 1, \dots, N-1$

w punkcie ω_N^j; DFT jest zatem ciągiem wartości wielomianu o współczynnikach $a_i,\ i = 0, 1, \ldots, N-1$ w N różnych punktach $\omega_N^j,\ j = 0, \ldots, N-1$.

Istnieje przekształcenie odwrotne do DFT (tzn. złożenie DFT z tym przekształceniem daje identyczność) – odwrotna dyskretna transformata Fouriera (IDFT, Inverse DFT). IDFT jest zadana wzorem

$$a_j = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \widehat{a}_k \omega_N^{-jk}.$$

Faktem, który będzie dla nas istotny, jest to, że IDFT pozwala na przekształcenie ciągu wartości $(\widehat{a}_j)_{j=0,\ldots,N-1}$ wielomianu o współczynnikach $a_i,\ i = 0, 1, \ldots, N-1$ w punktach $\omega_N^j,\ j = 0, \ldots, N-1$, w ciąg współczynników tego wielomianu. Załóżmy teraz że N jest całkowitą potęgą 2 (jeśli tak nie jest to wystarczy uzupełnić ciąg zerami aż do długości najbliższej potęgi 2). Wówczas DFT można zapisać w postaci

$$\widehat{a}_j = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} a_{2k} \omega_N^{2jk} + \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} a_{2k+1} \omega_N^{j(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} a_{2k} \omega_{\frac{N}{2}}^{jk} + \omega_N^j \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} a_{2k+1} \omega_{\frac{N}{2}}^{jk},$$

a zatem wyrazić DFT ciągu $(a_j)_{j=0,\ldots,N-1}$ za pomocą DFT ciagów $(a_{2j})_{j=0,\ldots,\frac{N}{2}-1}$, $(a_{2j+1})_{j=0,\ldots,\frac{N}{2}-1}$. Oznaczmy DFT $(a_{2j})_{j=0,\ldots,\frac{N}{2}-1}$ przez $\widehat{a}^{[0]}$, a DFT $(a_{2j+1})_{j=0,\ldots,\frac{N}{2}-1}$ przez $\widehat{a}^{[1]}$. Po spostrzeżeniu, że $\omega_N^{\frac{N}{2}} = -1$, a więc $\omega_N^{\frac{N}{2}+k} = -\omega_N^k$, powyższy wzór możemy zapisać, jako

$$\begin{array}{ll} \widehat{a}_j & = \widehat{a}_j^{[0]} + \widehat{a}_j^{[1]} \\ \widehat{a}_{j+\frac{N}{2}} & = \widehat{a}_j^{[0]} - \widehat{a}_j^{[1]} \end{array} \quad , \quad j = 0, \ldots, \frac{N}{2} - 1.$$

Otrzymaliśmy w ten sposób rekurencyjny algorytm (pseudokod na kolejnej stronie, algorytm 1) pozwalający na obliczenie DFT. Wprowadzając drobne modyfikacje można za pomocą tego algorytmu obliczać IFFT – szybką wersję IDFT. Złożoność algorytmu można opisać wzorem

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n).$$

Algorytm 1 FFT („dziel i zwyciężaj”!)

Input: Tablica $a = [a_0, \ldots, a_{N-1}]$ o długości będącej potęgą 2.
Output: Tablica $\widehat{a} = [\widehat{a}_0, \ldots, \widehat{a}_{N-1}]$ o długości będącej potęgą 2 będąca DFT ciągu przechowywanego w a.

def FFT(a):
    if N==1 **then** ▷ Warunek stopu rekurencji
        return a

    $\omega_n = e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{N}}$
    $\omega = 1$
    $\widehat{a}^{[0]} = \mathrm{FFT}([a_0, a_2, \ldots, a_{N-2}]$
    $\widehat{a}^{[1]} = \mathrm{FFT}([a_1, a_3, \ldots, a_{N-1}]$

    for $j := 0 : \frac{N}{2} - 1$ **do**
        $\widehat{a}_j = \widehat{a}_j^{[0]} + \omega \widehat{a}_j^{[1]}$
        $\widehat{a}_{j+\frac{N}{2}} = \widehat{a}_j^{[0]} - \omega \widehat{a}_j^{[1]}$
        $\omega = \omega \omega_N$
    return $\widehat{a}$

Algorytm 2 Fast-Multiplication

Input: Tablice $f = [f_0, \ldots, f_{n-1}]$, $g = [g_0, \ldots, g_{n-1}]$, w których przechowywane są współczynniki mnożonych wielomianów.
Output: Tablica $h = [h_0, \ldots, h_m]$ przechowująca współczynniki iloczynu f i g.

def FAST-MULTIPLICATION(f, g)
    $f := [\underbrace{f_0, \ldots, f_{n-1}, 0, \ldots, 0}_{2^k,\ k \in \mathrm{N} \wedge 2^k \geqslant 2n-1}]$
    $g := [\underbrace{g_0, \ldots, g_{n-1}, 0, \ldots, 0}_{2^k,\ k \in \mathrm{N} \wedge 2^k \geqslant 2n-1}]$

    $\widehat{f} = \mathrm{FFT}(f)$
    $\widehat{g} = \mathrm{FFT}(g)$
    $\widehat{h} = [\widehat{f}_0 \cdot \widehat{g}_0, \ldots, \widehat{f}_m \cdot \widehat{g}_m]$

    $h = \mathrm{IFFT}(\widehat{h})$
    return h

Rozwiązując powyższą zależność otrzymujemy $T(n) = \Theta(n \log n)$. Algorytm należący do klasy algorytmów pozwalających na szybkie obliczenie DFT nazywany jest FFT (Fast Fourier Transform, szybka transformata Fouriera); taki też jest algorytm 1 – jak dotąd nie jest znany algorytm pozwalający na obliczenie FFT w ogólnym przypadku szybciej niż w czasie $\Theta(n \log n)$.

Majac do dyspozycji FFT, łatwo będzie wyznaczyć iloczyn dwóch wielomianów: wiedząc, że DFT pozwala na wyznaczenie wartości wielomianu w N punktach ω_N^j, $j = 0, \ldots, N-1$, wystarczy do wielomianów f, g n-tego stopnia dopisać zerowe wyrazy wyższych stopni aż do wyrazu leżącego przy $2n$-tym współczynniku, obliczyć $\widehat{f}$ i $\widehat{g}$ – DFT ciągów współczynników f i g, wymnożyć i-ty element DFT $\widehat{f}$ i $\widehat{g}$, a następnie policzyć IDFT otrzymanych iloczynów, będący ciągiem współczynników wielomianu będącego iloczynem f i g.

Przyjrzyjmy się operacjom wykonywanym w algorytmie 2. Ponieważ złożoność FFT i IFFT to $\Theta(n \log n)$, a złożoność operacji wykonywanej w linii 7 algorytmu 2 to $\Theta(n)$, złożoność mnożenia wielomianów tą metodą to $\Theta(n \log n)$.

Obecnie nie są znane szybsze metody mnożenia wielomianów. Na koniec warto zaznaczyć, że wszystkie algorytmy pozwalające na mnożenie wielomianów po drobnych modyfikacjach mogą służyć do mnożenia dużych liczb naturalnych – mając $n, m \in \mathrm{N}$, wystarczy potraktować ich rozwinięcie dziesiętne jako współczynniki wielomianu.

Marcin Jenczmyk

Literatura

[1] William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, Brian P. Flannery, *Numerical Recipes in C. The Art of Scientific Computing* CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 1992

[2] Robert T. Moenck, *Practical Fast Polynomial Multiplication*

[„Miękka” i „twarda” analiza]

Część druga

W tym artykule chciałabym Wam, drodzy Czytelnicy zaprezentować krok po kroku odpowiednik w „twardej” analizie jednego z twierdzeń zaliczanego według naszego podziału (patrz numer grudniowy) do „miękkiej” analizy. Na początku małe przypomnienie. Zgodnie z esejem prof. Terrence'a Tao [1] wiemy już, że „twarda” analiza koncentruje się najbardziej na skończonych ilościach, tj.: kardynalności zbiorów skończonych, mierze ograniczonych zbiorów, wartości zbieżnych całek, normie skończenie wymiarowego wektora, oraz ich własnościach (w szczególności ograniczeniami dolnymi i górnymi). Zaś drugi rodzaj, tj. analiza miękka, zajmuje się obiektami o charakterze nieskończonym, takimi jak: ciągi, zbiory i funkcje mierzalne, σ-algebry, przestrzenie Banacha oraz ich własnościami – zbieżnością, ograniczonością, całkowalnością, zupełnością, zwartością itd.

Twierdzenie, do którego będziemy szukać odpowiednika w twardej analizie, nazywane jest *Zasadą nieskończonej zbieżności*, a brzmi następująco:

Twierdzenie (Zasada nieskończonej zbieżności)**.** *Każdy ograniczony i monotoniczny ciąg liczb rzeczywistych $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny.*

Bez straty ogólności możemy przyjąć, że ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest rosnący oraz jego wyrazy należą do przedziału $[0,1]$. Po wprowadzeniu tej zmiany otrzymujemy następujące twierdzenie:

Twierdzenie (Zasada nieskończonej zbieżności – wersja II)**.** *Niech $0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant 1$. Wówczas istnieje taki $x \in \mathbb{R}$, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $N \in \mathbb{N}$, dla którego*

$$|x_n - x| \leqslant \varepsilon \quad \textit{dla} \quad n \geqslant N.$$

Widzimy, że mamy tu sporo kwantyfikatorów. W pierwszym kroku zastąpimy więc notację zbieżnego ciągu poprzez ciąg Cauchy'ego, otrzymując w ten sposób następujące twierdzenie:

Twierdzenie (Zasada nieskończonej zbieżności – wersja III)**.** *Niech $\varepsilon > 0$ oraz*

$$0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant 1.$$

Wówczas istnieje takie $N \in \mathbb{N}$, że

$$|x_n - x_m| \leqslant \varepsilon$$

dla wszystkich $n, m \geqslant N$.

Zatem: co jest odpowiednikiem dla powyższych twierdzeń w twardej analizie? Na początku musimy zamienić nieskończony ciąg x_n na ciąg skończony. A więc zróbmy to:

Twierdzenie (Zasada skończonej zbieżności- podejście I)**.** *Niech* $\varepsilon > 0$, $M \in \mathbb{N}$ *oraz*

$$0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_M \leqslant 1.$$

Wówczas istnieje takie $N \in \mathbb{N}$*, że* $N \leqslant M$ *oraz*

$$|x_n - x_m| \leqslant \varepsilon$$

dla wszystkich $n, m \geqslant N$*.*

Dowód. Wystarczy podstawienie $N = M$. □

Jednakże potrzebujemy wzmocnić nasze twierdzenie. Może będzie wystarczającym, jeśli $N \in \mathbb{N}$ będzie tylko zależne od ε? Spróbujmy więc przeformułować uzyskane powyżej twierdzenie:

Zasada skończonej zbieżności – podejście II. Niech $\varepsilon > 0$, $M \in \mathbb{N}$ oraz

$$0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_M \leqslant 1.$$

Wówczas istnieje takie $N = N(\varepsilon)$ zależne tylko od ε, że

$$|x_n - x_m| \leqslant \varepsilon$$

dla wszystkich $n, m \geqslant N$.

Jednakże okazuje się, że to przeformułowanie jest fałszywe. Weźmy na przykład ciąg:

$$x_i = \begin{cases} 0 & \text{dla } i \neq M \\ 1 & \text{dla } i = M \end{cases}$$

Widzimy, że ciąg (x_i) nie spełnia warunku Cauchy'ego, chyba, że $N = M$. Jednakże tego nie możemy przyjąć, ponieważ byłoby to sprzeczne z naszymi założeniami.

A więc, czy istnieje w ogóle nietrywialne twierdzenie, które mówiłoby wszystko o skończonych, monotonicznych i ograniczonych ciągach? Okazuje się, że tak. Wykorzystamy zasadę szufladkową, która dla naszego ciągu $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ implikuje następujące twierdzenie:

Twierdzenie (Zasada szufladkowa – wersja I)**.** *Niech* $\varepsilon > 0$, $M \in \mathbb{N}$ *oraz*

$$0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_M \leqslant 1.$$

Jeśli

$$M \geqslant \frac{1}{\varepsilon + 1}$$

to wówczas istnieje takie $N \in \mathbb{N}$*, że* $1 \leqslant N < M$ *oraz*

$$|x_{N+1} - x_N| \leqslant \varepsilon.$$

Dowód. Załóżmy, że istnieje taki $\varepsilon > 0$, że

$$|x_{N+1} - x_N| > \varepsilon.$$

Wówczas $|x_m - x_1| > (M-1)\varepsilon \geqslant 1$, ponieważ pomiędzy wyrazami $x_1 \ldots x_M$ mamy $M-1$ przerw, a każda z nich jest większa od ε. Doszliśmy do sprzeczności, ponieważ $x_m, x_1 \in (0, 1)$. □

A więc nasza pierwsza wersja zasady szufladkowej jest prawdziwa, lecz za słaba, by implikować skończoną wersję zasady nieskończonej zbieżności. Możemy jednak sformułować jako wniosek twierdzenie dla ciągów nieskończonych:

Twierdzenie (Słaba zasada nieskończonej zbieżności I)**.** *Niech*

$$0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \ldots \leqslant 1.$$

Wówczas

$$\liminf_{n\to\infty} |x_{n+1} - x_n| = 0.$$

Nie wynika z niego jednak w pełni *Zasada nieskończonej zbieżności.* Aby uzyskać jej lepszy odpowiednik w twardej analizie, musimy rozszerzyć obszar stabilności, jaki oferuje nam zasada szufladkowa. Zróbmy więc kilka prostych podstawień.

Twierdzenie (Zasada szufladkowa – wersja II)**.** *Niech* $\varepsilon > 0$, $M \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 1$ *oraz*

$$0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_M \leqslant 1.$$

Jeśli

$$M \geqslant \frac{k}{\varepsilon} + 1$$

to wówczas istnieje takie $N \in \mathbb{N}$*, że* $1 \leqslant N < N + k \leqslant M$ *oraz*

$$|x_n - x_m| \leqslant \varepsilon$$

dla każdego $n, m \in \{N, \ldots, N + k\}$.

Twierdzenie to jest także prawdziwe. Wystarczy, że w miejsce ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ w pierwszej wersji zasady szufladkowej wstawimy ciąg $x_k, x_{2k}, x_{3k}, \ldots$

Jednakże to twierdzenie jest tylko trochę lepsze niż poprzednie. Implikuje natomiast następujące twierdzenie w miękkiej analizie dla ciągów nieskończonych:

Twierdzenie (Słaba zasada nieskończonej zbieżności II)**.** *Niech*

$$0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant 1.$$

Wówczas

$$\liminf_{n\to\infty} |x_{n+k} - x_n| = 0$$

dla wszystkich $k \in \mathbb{N}$.

Lecz dalej nie jest ono zbyt silne, by implikować w pełni *Zasadę nieskończonej zbieżności.* Mimo to, pokazuje, że możemy zamienić $n+k$ na $2n$ otrzymując:

Twierdzenie (Zasada szufladkowa – wersja III)**.** *Niech* $\varepsilon > 0$, $M \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 1$ *oraz*

$$0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_M \leqslant 1.$$

Jeśli

$$M \geqslant 2^{\frac{1}{\varepsilon}} + 1$$

to wówczas istnieje takie $N \in \mathbb{N}$, *że* $1 \leqslant N < 2N \leqslant M$ *i*

$$|x_n - x_m| \leqslant \varepsilon$$

dla każdego $n, m \in \{N, \ldots, 2N\}$.

Tę wersję zasady szufladkowej możemy udowodnić podobnie jak poprzednią, wstawiając w pierwszej wersji zasady szufladkowej ciąg $x_1, x_2, x_4, x_8 \ldots$. Wniosek jaki płynie z powyższego twierdzenia w miękkiej analizie jest następujący:

Wniosek. *Niech*

$$0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant 1.$$

Wówczas

$$\liminf_{n\to\infty} |x_{2n} - x_n| = 0.$$

Można oczywiście rozpatrywać kolejne wersje zasady szufladkowej, jednakże by uzyskać właściwy analogon twierdzenia o nieskończonej zbieżności musimy wziąć pod uwagę wszystkie jej wersje. Postępując w ten sposób, otrzymujemy następujące twierdzenie:

Twierdzenie (Zasada skończonej zbieżności – podejście III). *Niech* $\varepsilon > 0$, $M \in \mathbb{N}$, $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *będzie funkcją oraz*

$$0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_M \leqslant 1$$

będzie takie, że M *jest odpowiednio duże zależne od* F *i* ε*. Wówczas istnieje takie* $N \in \mathbb{N}$*, że*

$$1 \leqslant N < N + F(N) \leqslant M$$

i

$$|x_n - x_m| \leqslant \varepsilon$$

dla każdego $n, m \in \{N, \ldots, N + F(N)\}$*.*

Dowód. Powyższe twierdzenie dowodzimy przez wstawienie ciągu: $x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, \ldots$ do pierwszej wersji zasady szufladkowej, gdzie kolejne indeksy ciągu $(x_{in})_{i,n\in\mathbb{N}}$ definiujemy rekurencyjnie

$$i_1 := 1,$$
$$i_{j+1} := i_j + F(i_j).$$

□

Uwaga. Zauważmy, że:

- $F(N) \equiv 1$

odpowiada pierwszej wersji zasady szufladkowej,

- $F(N) \equiv k$

odpowiada drugiej wersji zasady szufladkowej,

- $F(N) \equiv N$

odpowiada trzeciej wersji zasady szufladkowej.

Tak więc otrzymaliśmy twierdzenie należące do twardej analizy, które jest odpowiednikiem *Zasady nieskończonej zbieżności.*

Martyna Biskup

Literatura

[1] T.Tao, *Soft analysis, hard analysis and the finite covergence principle.* www.terrytao.wordpress.com/2007/05/23/

[Twierdzenie Borsuka–Ulama a pewien problem dotyczący dwóch całek]

W moim artykule przedstawię pewien problem dotyczący całek dwóch funkcji, a następnie rozwiążę go, korzystając z twierdzenia Borsuka–Ulama o antypodach. Wykorzystam publikację [1] Vilmosa Totika.

Problem ten pojawił się w 1995 roku na Miklós Schweitzer Mathematical Contest na Węgrzech. Jest to konkurs przeznaczony dla studentów i młodych absolwentów, a nawet dla uzdolnionych uczniów szkół średnich, organizowany każdej jesieni od 1949 roku przez Janos Bolyai Mathematical Society. Zagadnienie to brzmi następująco:

Niech $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ będą takimi funkcjami ciągłymi, że:

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 g(x)dx = 1. \tag{2}$$

Czy istnieje przedział $I \subset [0,1]$ spełniający

$$\int_I f(x)dx = \int_I g(x)dx = \frac{1}{2}? \tag{3}$$

Definicja. Niech $l \in \mathbb{N}$. Zbiór $S^l = \{(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{l+1}) \in \mathbb{R}^{l+1} : \eta_1^2 + \eta_2^2 + \ldots + \eta_{l+1}^2 = 1\}$ nazywamy sferą jednostkową w $\mathbb{R}^{l+1}$.

Definicja. Punkty $A, B \in S^l$ nazywamy antypodycznymi wtedy i tylko wtedy, gdy $B = -A$. Inaczej mówiąc punkty antypodyczne to takie dwa punkty sfery, że odcinek je łączący przechodzi przez środek tej sfery.

Na powierzchni kuli ziemskiej punktami antypodycznymi są np. bieguny.

Twierdzenie (Borsuka–Ulama o antypodach)**.** *Niech $T : S^l \to \mathbb{R}^{l+1}$ będzie funkcją ciągłą, gdzie S^l jest sferą jednostkową w $\mathbb{R}^{l+1}$. Wówczas istnieje taka para punktów antypodycznych $(x, -x)$ należących do S^l, że $T(x) = T(-x)$. Ponadto, jeśli funkcja T jest nieparzysta, to $T(x) = (0,0)$.*

Twierdzenie to ma ciekawą interpretację. Za sferę możemy przyjąć powierzchnię kuli ziemskiej, a za funkcję T ciągłą funkcję przyporządkowującą każdemu punktowi powierzchni ciśnienie oraz temperaturę w tym punkcie. Wówczas teza tego twierdzenia mówi, że istnieją takie punkty antypodyczne na Ziemi, w których ciśnienie oraz temperatura są takie same.

Teraz pokażemy, jak z tego twierdzenia wynika teza naszego początkowego problemu o dwóch całkach. Zdefiniujmy funkcję $T : S^2 \to \mathbb{R}^3$ wzorem:

$$T(\eta_1, \eta_2, \eta_3) := (P_f(\eta_1, \eta_2, \eta_3), P_g(\eta_1, \eta_2, \eta_3)),$$

przy czym

$$P_f(\eta_1, \eta_2, \eta_3) := \operatorname{sgn}(\eta_1) \int_0^{\eta_1^2} f(x)dx + \operatorname{sgn}(\eta_2) \int_{\eta_1^2}^{\eta_1^2+\eta_2^2} f(x)dx + \operatorname{sgn}(\eta_3) \int_{\eta_1^2+\eta_2^2}^{1} f(x)dx$$

oraz

$$P_g(\eta_1, \eta_2, \eta_3) := \operatorname{sgn}(\eta_1) \int_0^{\eta_1^2} g(x)dx + \operatorname{sgn}(\eta_2) \int_{\eta_1^2}^{\eta_1^2+\eta_2^2} g(x)dx + \operatorname{sgn}(\eta_3) \int_{\eta_1^2+\eta_2^2}^{1} g(x)dx.$$

Zauważmy, że funkcja T jest nieparzysta i ciągła. Zatem z twierdzenia Borsuka-Ulama wynika, że istnieje taki punkt $(\eta_1^*, \eta_2^*, \eta_3^*) \in S^2$, że:

$$T(\eta_1^*, \eta_2^*, \eta_3^*) = (0, 0).$$

To znaczy:

$$\operatorname{sgn}(\eta_1^*) \int_0^{\eta_1^{*\,2}} f(x)dx + \operatorname{sgn}(\eta_1^*) \int_{\eta_1^{*\,2}}^{\eta_1^{*\,2}+\eta_2^{*\,2}} f(x)dx + \operatorname{sgn}(\eta_3^*) \int_{\eta_1^{*\,2}+\eta_2^{*\,2}}^{1} f(x)dx = 0 \tag{4}$$

oraz

$$\operatorname{sgn}(\eta_1^*) \int_0^{\eta_1^{*\,2}} g(x)dx + \operatorname{sgn}(\eta_1^*) \int_{\eta_1^{*\,2}}^{\eta_1^{*\,2}+\eta_2^{*\,2}} g(x)dx + \operatorname{sgn}(\eta_3^*) \int_{\eta_1^{*\,2}+\eta_2^{*\,2}}^{1} g(x)dx = 0. \tag{5}$$

Zauważmy, że $(\eta_1^*, \eta_2^*, \eta_3^*) \neq (0, 0, 0)$ oraz $(\eta_1^*, \eta_2^*, \eta_3^*) \neq (1, 1, 1)$, bo:

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^{\eta_1^{*\,2}} f(x)dx + \int_{\eta_1^{*\,2}}^{\eta_1^{*\,2}+\eta_2^{*\,2}} f(x)dx + \int_{\eta_1^{*\,2}+\eta_2^{*\,2}}^{1} f(x)dx = 0,$$

gdy $(\eta_1^*, \eta_2^*, \eta_3^*) = (0,0,0)$ lub $(\eta_1^*, \eta_2^*, \eta_3^*) = (1,1,1)$. Tak samo:

$$\int_0^1 g(x)dx = 0,$$

co daje sprzeczność z (2). Ponadto co najwyżej jedna z liczb $\eta_1^*, \eta_2^*, \eta_3^*$ może być równa 0. Jeśli założymy, że 0 jest dodatnia, to dokładnie dwie spośród liczb $\eta_1^*, \eta_2^*, \eta_3^*$ są tego samego znaku. Można się o tym przekonać rozpatrując trzy możliwe przypadki: albo jedna z nich wynosi 0, a wtedy jedna z pozostałych wynosi 1, a druga z pozostałych wynosi -1; albo dwie z nich wynoszą -1 a trzecia wynosi 1; albo dwie z nich są równe 1 a trzecia wynosi -1.
W każdym z powyższych przypadków, dwie liczby są tego samego znaku, a trzecia wynosi -1, czyli η_i^* wynosi -1 dla pewnego $i \in \{1,2,3\}$, tym samym jest różna od 0. Weźmy za I przedział całkowania, całki mnożonej przez $\operatorname{sgn}(\eta_i^*)$ w równaniach (4) i (5). Wówczas z równości

$$T(\eta_1^*, \eta_2^*, \eta_3^*) = (0,0)$$

oraz z definicji funkcji T, otrzymujemy (3).

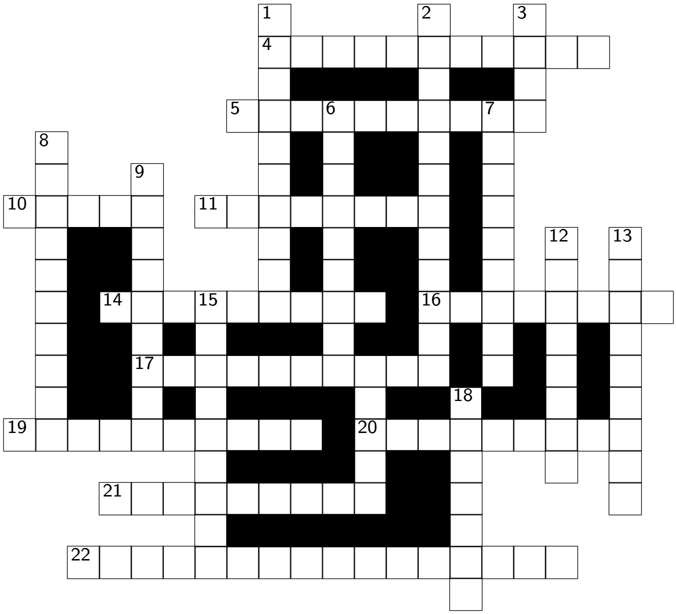
Zapraszam do zapoznania się z artykułem [1]. Można tam znaleźć kilka dowodów tezy tego problemu przez inne twierdzenia.

Łukasz Rak

Literatura

[1] V. Totik, *A tale of two integrals*, Amer. Math. Monthly 108(1999), m. 3, 227-240.

[Krzyżówka]



Poziomo

4 Wielomianu lub z liczby.
5 Równanie zmiennych całkowitych.
10 Issai, niemiecki matematyk zajmujący się m.in. teorią reprezentacji grup.
11 Na przykład foremny.
14 Zwracający zerową resztę z dzielenia.
16 Superpozycja funkcji.
17 Operacja odwrotna do różniczkowania.
19 Gęstość funkcjonału działania charakteryzującego właściwości mechaniczne układu fizycznego.
20 Indyjski matematyk samouk.
21 „Wyniczek odejmowanka”.
22 Dotyczący rachunku prawdopodobieństwa.

Pionowo

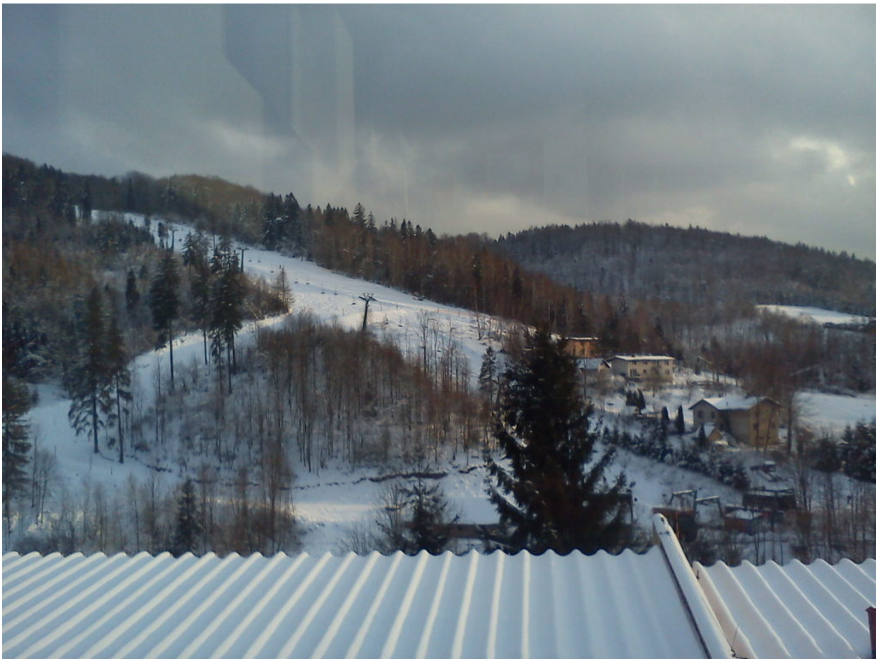
1 Na przykład hermitowskie.
2 Równanie zmiennych całkowitych.
3 Z greki: niepodzielny.
6 Szereg ograniczający.
7 Własność Cauchy’ego lub Heinego ciągu.
8 Metoda rozwiązywania układu równań liniowych
9 Stosunek inaczej.
12 Czynność powtarzania tej samej instrukcji.
13 Operacja algebraiczna.
15 Stoją przed każdym dowodem.
18 Pierre Simon, matematyk, astronom oraz fizyk.

Beata Łojan

[The 11$^{\text{th}}$ ISCA]

Podsumowanie

The International Students' Conference on Analysis to studencka polsko-węgierska konferencja z analizy matematycznej, zainicjowana w 2004 r. przez Włodzimierza Fechnera, dziś opiekuna Koła Naukowego Matematyków UŚ. Na konferencję tę zapraszani są profesorowie z Uniwersytetu w Debreczynie oraz Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach oraz szesnastka studentów i doktorantów z tych uczelni. W tym roku mieliśmy przyjemność gościć na konferencji profesorów: Zoltána Borosa, Romana Gera, Attilę Gilányiego oraz Macieja Sablika. *ISCA 2015* odbyła się w dniach 31.01-03.02.2015 r. w Ośrodku Wypoczynkowo–Konferencyjnym „Gwarek" w Ustroniu. Część uczestników wygłosiło referat oparty o własne wyniki. Oprócz części naukowej był także czas na wypoczynek. Korzystając z uroków Ustronia i pięknej zimy, niektórzy uczestnicy konferencji wybrali się na pobliski stok oraz spacer po górach.



Kolejna, dwunasta już edycja ISCA odbędzie się już za rok, tym razem na Węgrzech. Wszystkich chętnych do wzięcia udziału w ISCA 2016 prosimy o zgłaszanie się do dra hab. Włodzimierza Fechnera lub pokoju nr 524.

Zarząd KNM

[Święto Pi 2015]

Wielkimi krokami zbliża się tegoroczne Święto Liczby Pi. To już dziewiąta edycja festiwalu nauk ścisłych, odbywającego się na naszym wydziale. Idea Święta Liczby Pi powstała w Stanach Zjednoczonych – stąd data: 14 marca, czyli w notacji amerykańskiej 3/14. Na grunt polski pomysł przeniósł ówczesny Dziekan Wydziału Matematyki, Fizyki i Chemii UŚ, a obecny Dyrektor Instytutu Matematyki UŚ, prof. dr hab. Maciej Sablik.

Jak co roku przygotowaliśmy bogaty program zajęć. Będą wykłady, warsztaty, konkursy, pokazy. W Instytucie Matematyki między innymi posłuchamy o geometrii nieeuklidesowej, zmierzymy się z łamigłówkami i zagadkami logicznymi, poznamy tajniki szyfrowania, sami spróbujemy zaprogramować roboty, dowiemy się czegoś o fraktalach i zajrzymy do Kawiarni Szkockiej. A ciekawe zajęcia przygotowali też fizycy i chemicy...

Szczegółowy program pojawi się w najbliższych dniach na stronie internetowej `www.swietopi.pl`. Serdecznie zapraszamy do wzięcia udziału w naszym festiwalu wszystkich zainteresowanych - nie tylko uczniów i studentów, ale także pasjonatów matematyki i tych, którzy tę pasję chcieliby dopiero w sobie odkryć. A jeśli ktoś miałby ochotę poprowadzić warsztaty czy w inny sposób pomóc w organizacji – to wspaniale! Prosimy wówczas o kontakt z Joanną Zwierzyńską (joanna@knm.katowice.pl).

Do zobaczenia 13 marca 2015 r.!

Joanna Zwierzyńska

[Stopka redakcyjna]

Redaktor naczelny: Joanna Zwierzyńska
Autorzy artykułów: Martyna Biskup, Marcin Jenczmyk, Beata Łojan, Łukasz Rak, Mateusz Szymański
Skład i łamanie w LaTeX: Marcin Jenczmyk

Kontakt z redakcją bezpośrednio w pokoju KNM (p.524)
lub elektronicznie: macierzator@knm.katowice.pl

Wszystkie archiwalne numery [MACIERZATORA] dostępne są również w wydaniu elektronicznym na stronie internetowej KNM UŚ: `www.knm.katowice.pl`. Wydanie elektroniczne [MACIERZATORA] posiada numer ISSN: 2083-9774.

styczeń-luty 2015