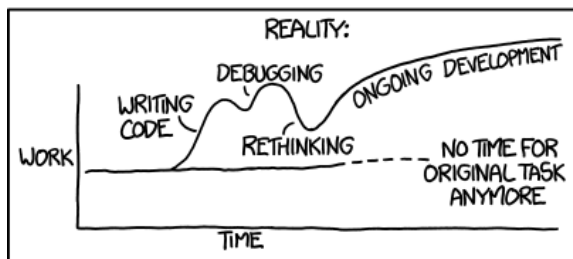
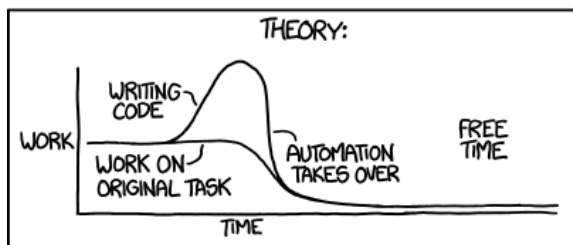


[MACIERZATOR60]

Gazetka redagowana przez Koło Naukowe Matematyków Uniwersytetu Śląskiego

"I SPEND A LOT OF TIME ON THIS TASK.
I SHOULD WRITE A PROGRAM AUTOMATING IT!"



<http://xkcd.com/1319/>

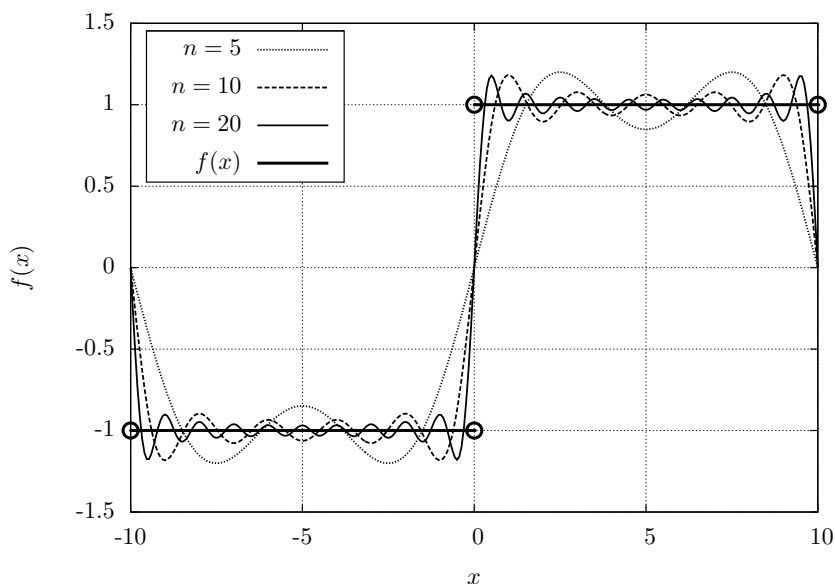
Witamy w wiosenno-letnim numerze
[MACIERZATORA]!

Zbliża się sesja egzaminacyjna – czas wytężonej nauki. Przygotowaliśmy na ten czas nieco lżejszą lekturę. W przerwie pomiędzy Fichtenholzem a Kostykinem proponujemy [MACIERZATOR], a w nim: artykuł o aproksymacji funkcji szeregiem Fouriera z poprawką Lanczosa, kilka słów o związkach między matematyką a muzyką oraz o kwantowej próżni i efekcie Casimira. Dalej będzie o odejmowaniu zbiorów oraz o liczbach algebraicznych i przestępnych. Numer zakończy teoria gier w praktyce, czyli matematyczne rozważania na temat popularnej gry *Snake*. Przyjemnej lektury i udanej sesji egzaminacyjnej

życzy Redakcja

[Aproksymacja funkcji szeregiem Fouriera z poprawką Lanczosa]

Szereg Fouriera pozwala rozłożyć funkcję okresową, spełniającą warunki Dirichleta, na sumę funkcji trygonometrycznych. Szeregi Fouriera zostały wprowadzone na początku XIX wieku w celu rozwiązania równania ciepła dla metalowej płyty. Współcześnie znajdują ogromne zastosowanie w fizyce, teorii drgań, przetwarzaniu sygnałów, oraz technice cyfrowej.



Rysunek 1: Wizualizacja efektu Gibbsa – aproksymacja sygnału prostokątnego $f(x)$ dla $n = 5, 10, 20$ harmonicznych.

Szereg Fouriera nie gwarantuje jednak zbieżności wartości funkcji w punktach nieciągłości. Przy aproksymacji funkcji okresowej z punktami nieciągłości w okolicach tych punktów wykres nadmiernie wokół nich oscyluje – jest to tzw. efekt Gibbsa (rysunek 1). W celu eliminacji efektu Gibbsa, który obserwuje się przy punktach nieciągłości, wprowadza się współczynniki Lanczosa.

Na początek przypomnijmy definicję szeregu Fouriera, którą większość Czytelników zapewne poznała podczas toku studiów.

Niech dana będzie funkcja okresowa $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o okresie $T \in \mathbb{R}^+$, bezwzględnie całkowna w przedziale $[0, T]$. Szeregiem Fouriera funkcji f nazywamy szereg funkcyjny następującej postaci:

$$S(x) = a_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)), \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

o współczynnikach określonych następującymi wzorami:

$$a_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) \cos(n\omega x) dx \quad b_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) \sin(n\omega x) dx, \quad n \in \mathbb{N}$$

Oczywiście, aby funkcję f można było przedstawić w postaci szeregu Fouriera, musi ona spełniać odpowiednie warunki – tzw. warunki Dirichleta:

- funkcja f musi być bezwzględnie całkowna $\int_{t_1}^{t_1+T} |f(x)| dx < \infty$,
- dla dowolnego przedziału czasu funkcja f musi mieć skończoną liczbę ekstremów,
- dla dowolnego przedziału czasu funkcja f musi mieć skończoną liczbę punktów nieciągłości.

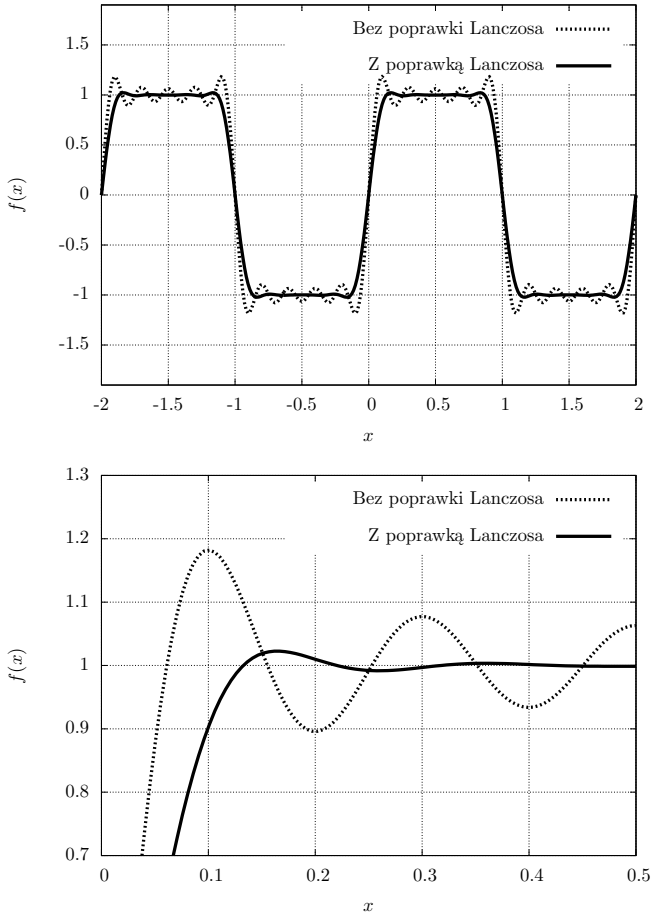
Podczas rozwijania funkcji f , która ma punkty nieciągłości oraz spełnia wcześniej wspomniane warunki, w okolicach tych punktów pojawia się wspomniany efekt Gibbsa. W celu jego eliminacji wprowadza się współczynniki Lanczosa. Funkcję f aproksymuje się wówczas szeregiem:

$$S(x) = a_0 + 2 \sum_{n=1}^{m-1} \operatorname{sinc}\left(\frac{n}{m}\right) \cdot \left[a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x) \right],$$

gdzie $\operatorname{sinc} x = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$ to współczynnik σ -Lanczosa.

Pokażemy teraz skuteczność poprawki na wybranym przykładzie. Jako przykład rozważmy okresowy sygnał prostokątny¹ f o okresie $T = 2$ i amplitudzie równej 1. Poniżej zamieszczono wykres obrazujący działanie poprawki Lanczosa.

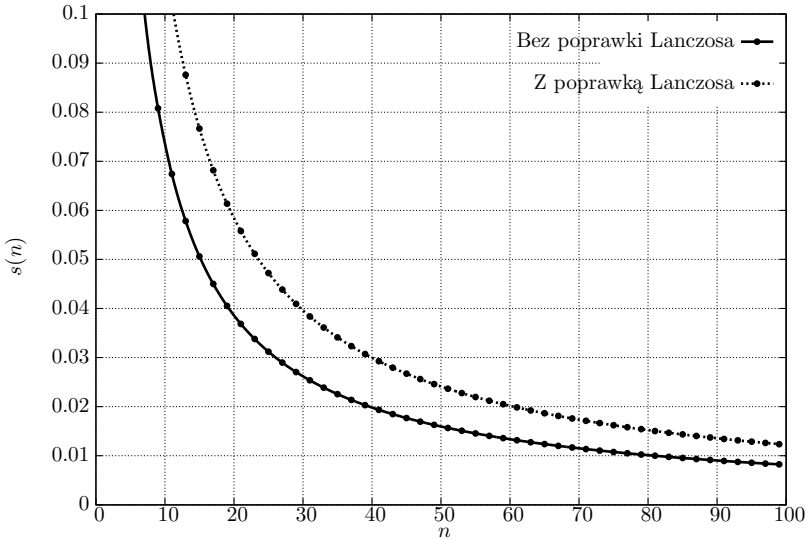
¹jako sygnał rozumiemy funkcję określoną na dziedzinie czasu



Rysunek 2: Sumy pierwszych czterech niezerowych harmonicznych rozwijanego przebiegu. Wykres zaznaczony linią przerywaną przedstawia aproksymację bez współczynników Lanczosa, a linią ciągłą ze współczynnikami (dolny wykres to zbliżenie na okolice punktu nieciągłości).

Dla poprzedniego przykładu obliczono błąd aproksymacji w zależności od ilości harmonicznych n dla jednego okresu funkcji. Za błąd aproksymacji przyjęto:

$$s = \int_0^T [f(x) - S(x)]^2 dx = \int_0^1 [S(x) - 1]^2 dx + \int_1^2 [S(x) - (-1)]^2 dx.$$



Rysunek 3: Zależność błęd aproksymacji od ilości harmonicznych

Na rysunku (3) widać, że pomimo częściowego niwelowania efektu Gibbsa, całościowo poprawka Lanczosa wprowadza większy błąd.

Jak widać, aproksymacja funkcji z użyciem poprawki Lanczosa w znaczącym stopniu niweluje efekt Gibbsa, który pojawia się w punktach nieciągłości. Kiedy zależy nam na stabilności sygnału, użycie tej poprawki jest zalecane. Zastosowanie poprawki Lanczosa powoduje jednak zmniejszenie stromizny zbocz funkcji w punktach nieciągłości, co może być efektem niepożądanym, kiedy bardziej zależy nam na szybkości zmian wartości sygnału. Takie zachowanie może być szczególnie ważne podczas konstrukcji układów cyfrowych, gdzie wydłużenie czasu przełączania między stanami niskimi a wysokimi może powodować wystąpienie tzw. hazardu.

Andrzej Więckowski

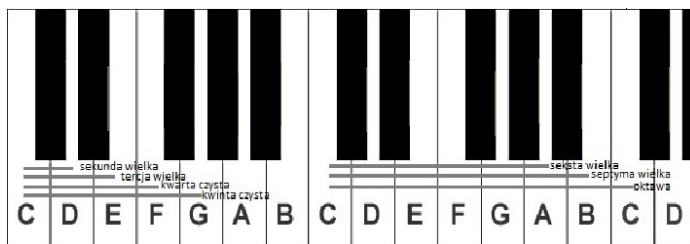
Literatura

- [1] J. Izydorczyk, G. Płonka, G. Tyma: *Teoria Sygnałów – Wstęp*, Wydawnictwo Helion, 2006, Gliwice.

[Obliczając muzykę]

Na pierwszy rzut oka wydawać by się mogło, że matematyka i muzyka są zupełnie różnymi dziedzinami. W końcu trudnym wydaje się pogodzenie nauki ścisłej (nawet jeśli najbardziej humanistycznej ze wszystkich) z dziedziną ściśle artystyczną. Ale czyż w obu nie tkwi piękno? Przyjrzyjmy się pewnym zjawiskom, naturalnym zarówno dla matematyków, jak i muzyków. Uwaga! Nie da się uniknąć mnogości pojęć muzycznych w takim temacie. Postaram się więc wyjaśniać je przynajmniej pogładowo.

Zacznijmy od nikogo innego jak Pitagorasa. I on, i uczniowie jego szkoły uważali, że każde zjawisko można opisać liczbami, więc ich uwadze nie mogła umknąć muzyka. Pitagoras zastanawiał się między innymi jaki jest związek między długością struny, a dźwiękiem przez nią wydawanym. Skonstruował *monochord* - prosty instrument muzyczny z jedną struną naciągniętą na pudło rezonansowe. Pitagoras dzielił kolejno strunę na coraz mniejsze odcinki i wyprowadził tezę, iż najprzyjemniejsze dla ucha są dźwięki, które powstają, kiedy struna jest podzielona w stosunku $1 : n$, $n \in \mathbb{N}$. Odkryty przez niego ciąg dźwięków stał się podstawą skal muzycznych. Jednak Pitagoras nie przewidział nieścisłości muzycznych wybrzmiewających z jego badań. W VI wieku p.n.e. nie istniał bowiem strój równomiernie temperowany. Ale o co w tym chodzi?



Rysunek 1: Interwały główne

We współczesnej (od XVII wieku) muzyce określa się interwały - odpowiedniki odcinków na prostej (nawet w sposób graficzny). Dzieli się je na konsonanse (współbrzmienia „czyste”) i dysonanse („zgrzytające”). Każdy z nich jest złożony z konkretnej liczby równych półtonów i nie rozważa się mniejszych składowych. Półtonem jest najmniejsza odległość między dźwiękami, które można zagrać na fortepianie. I tak, co 12 półtonów powinniśmy usłyszeć ten sam dźwięk (odpowiednio wyżej lub niżej, jest to

odległość oktawy lub jej wielokrotność). A gdyby poruszać się po klawiaturze kwintami (kwinta=7 półtonów) to ten sam dźwięk usłyszymy ponownie po 12 powtórzeniach (7 oktaw wyżej). Tak konstruuje się *koło kwintowe*. Zatem strój temperowany (oraz właśnie koło kwintowe) opiera się na podziale oktawy na 12 równych odcinków. Ale w szkole pitagorejskiej pojawiał się interwał mniejszy niż półton, co zaburzało powyższy porządek. Weźmy kwintę u Pitagorasa. Określił ją stosunkiem $\frac{3}{2}$. Startując z dźwięku G, po dwunastu kwintach oczekujemy ponownie g, 7 oktaw wyżej. Tak więc

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12} = 129,746,$$

ale skoro wszystkie półtony były równe, to spodziewamy się potęgi dwójki, w tym wypadku siódmej, czyli wyniku 128. Powstały stosunek, wynoszący około 1,014, nazywa się *komatem pitagorejskim* i jest to przybliżona wielkość ćwierćtonu. A to nie jest już najmilszy naszym uszom dźwięk. Tak więc skala określona przez Pitagorasa stosować się może współcześnie jedynie w monofonii (pojedynczej linii melodycznej), a i to przypadłoby do gustu raczej niewielkiemu gronu. Niestety, muzyka matematycznie intrygująca to przeważnie twórczość przełomu XIX i XX wieku, nie zawsze łatwa w odbiorze. Porzucamy więc Pitagorasa i zmierzamy na drugi koniec historii muzyki. Tu rządzi między innymi złoty podział i ciąg Fibonacciego.

Ciąg Fibonacciego to ciąg liczb całkowitych, zaczynający się od 0 i 1, w którym każdy kolejny wyraz jest sumą dwóch poprzednich. Kilka jego pierwszych wyrazów to:

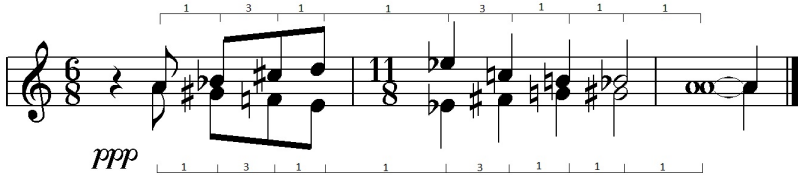
$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, \dots$$

Co ciekawe, stosunek dwóch następujących po sobie liczb stopniowo przybliża wartość nazywaną *złotym podziałem* lub *złotą proporcją*, która wynosi

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,6180339887\dots$$

Najczęściej przytaczanym przykładem zastosowania powyższych pojęć w muzyce jest twórczość Béli Bartóka (1881–1945). Weźmy utwór *Muzyka na instrumenty strunowe, perkusję i celestę*. Ma on 89 taktów, punkt kulminacji dynamicznej następuje w 55 takcie, pierwsze przedstawienie tematu (*ekspozycja*) trwa 21 taktów – wszystkie te liczby, jak widać, są liczbami Fibonacciego. Te obserwacje, poczynione przez Ernő Lendvaia, ujmujące również stosowne dodatkowe założenia, dotyczyły głównie strukturalnej budowy dzieła. Dochodzą do tego również struktury rytmiczne oraz harmoniczne. I tak interpretując np. ostatnie trzy takty pierwszej części tego

dzieła, możemy zauważyć symetrię pochodzącego interwałowego w partii skrzypiec (przypisane liczby to liczba półtonów między poszczególnymi nutami). Całe dzieło Bartóka oparte zostało na ścisłych wyliczeniach, choć niekoniecznie jest to słyszalny zabieg.



Czy jest więc sens analizować dzieło muzyczne pod kątem matematycznym, skoro nie można tak naprawdę usłyszeć obserwowanych zależności? Jest to poniekąd sztuczny zabieg, ale gdyby go odwrócić i analizować matematykę muzycznie, można by dostać o wiele ciekawsze wyniki, o czym pomyśleli już muzycy współcześni; między innymi punktualści, dodekafościści oraz serialiści. Ale o nich innym razem.

Agnieszka Morawiecka

[Efekt Casimira]

W fizyce istnieją dwa dowody na istnienie tak zwanej kwantowej próżni. Jak można się domyślić, nie jest to próżnia w zwykłym, klasycznym sensie: pojęcie to nie może być rozumiane jako przestrzeń pozbawiona cząstek. Gdzie więc tkwi różnica między kwantowym a klasycznym rozumieniem tego określenia? Odpowiedź leży u gruntu podstaw mechaniki kwantowej, a dokładniej, w poziomach energetycznych kwantowego oscylatora harmonicznego. Kwantowy oscylator harmoniczny różni się tym od klasycznego, że nie może przybierać dowolnych wartości energii. Można to zapisać matematycznie w następujący sposób:

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega.$$

gdzie:

$\hbar = 1,056 \times 10^{-34} J \cdot s$ – zredukowana stała Plancka, ω – częstość drgań oscylatora, $n = 0, 1, 2, \dots$ – numer poziomu energetycznego.

Łatwo zauważyć, że dla stanu podstawowego ($n = 0$) wartość tej energii jest niezerowa. Traktując pole elektromagnetyczne jako zbiór nieskończonej ilości oscylatorów harmonicznyc, dochodzimy do wniosku, że energia takiego pola w stanie podstawowym (stan podstawowy rozumiemy jako próżnię) jest nieskończona. Nieskończoność tę otrzymalibyśmy sumując wkłady do stanu podstawowego z całej przestrzeni. Jednak wtedy gdy ograniczymy się np. do objętości kubka, energia ta jest skończona i na tyle ogromna, że może doprowadzić do wrzenia wszystkie ziemskie oceany. Innym zaskakującym faktem dotyczącym próżni jest istnienie kwantowych fluktuacji. Oznacza to, że energia próżni w danym miejscu nie jest stała i ciągle ulega zmianom. Wynika to z zasady nieoznaczoności Heisenberga:

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2},$$

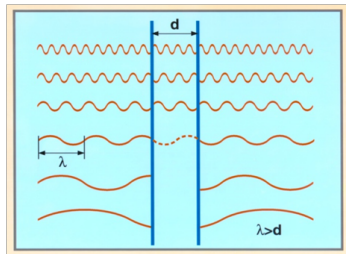
gdzie:

ΔE – niepewność pomiaru energii, Δt – niepewność pomiaru czasu.

Innymi słowy, oznacza to, że cząstki mogą zostać wykreowane przez „pożyczenie” energii ΔE z próżni. Istnieją jednak tylko przez bardzo krótki czas Δt , po czym natychmiast zostają zanihilowane (zniszczone). Takie cząstki nazywamy cząstkami wirtualnymi. Fakt ich istnienia jest potwierdzony doświadczalnie. Obserwacja tak zwanego efektu Casimira jest jak dotąd najbardziej przekonującym dowodem na istnienie kwantowej próżni i cząstek wirtualnych.

Efekt Casimira został pierwszy raz zaobserwowany doświadczalnie w 1996 (choć jego istnienie było przewidziane teoretycznie 50 lat wcześniej). Zjawisko to polega, w najprostrzej postaci, na przyciąganiu się dwóch metalowych nienaładowanych płyt znajdujących się w bardzo bliskiej odległości względem siebie (rzędu nm). Jakie jest wytłumaczenie tego zdumiewającego faktu? Posłużmy się rysunkiem. Na poniższym rysunku widoczne są dwie płyty oddalone od siebie o odległość d . Zarówno na zewnątrz, jak i pomiędzy płytami znajdują się fale o różnych długościach. Są to fale, które istnieją dzięki energii próżni oraz takie, które powstały dzięki istnieniu cząstek wirtualnych. Okazuje się, że pomiędzy płytami mogą istnieć tylko takie fale, których wielokrotność długości równa jest odległości d (fala będzie falą stojącą odbijającą się od powierzchni płyt tam i z powrotem).

Oznacza to, że fale o wszystkich długościach będą istniały na zewnątrz płyt, ale tylko niektóre będą się propagowały wewnątrz. Więcej fal oznacza więcej energii; pomiędzy wewnątrz i zewnątrz wytworzy się pewien gradient energii, który przełoży się na siłę przyciągającą działającą między płytami.



Zjawisko to interesujące jest nie tylko ze względu na to, że dowodzi istnienia „żywej” próżni, ale także dlatego, że daje możliwość złamania bariery prędkości światła. Dlaczego? Jak wiadomo, światło najszybciej porusza się w próżni, w każdym innym ośrodku porusza się z mniejszą prędkością. Skoro między płytami istnieje mniejsza energia niż na zewnątrz (w „normalnej” próżni), to istnieje możliwość, żeby światło poruszało się tam z większą prędkością niż słynne $3 \times 10^8 \frac{m}{s}$? Odpowiedź na to pytanie pozostaje wciąż nieznaną.

Na zakończenie warto dodać, że kształt próżni może mieć poważny wpływ na rozwój świata i nauki: fakt istnienia efektu Casimira będzie w przyszłości najprawdopodobniej poważnym ograniczeniem dla inżynierów – w szczególności przy budowie urządzeń w skali nano, a wykorzystanie energii próżni będzie godnym następcą elektrowni wodnych, jądrowych, wiatrowych. . .

Monika Richter

[O odejmowaniu zbiorów]

Wykonując działania na liczbach, jesteśmy przyzwyczajeni do tego, że możemy dodawać liczby przeciwne po obu stronach równości (nierówności), a dane równanie (nierówność) nadal jest prawidłowe.

Może zastanawialiście się kiedyś, czy takie działanie można uogólnić np. na zbiory w przestrzeniach liniowych? Aby odpowiedzieć na to pytanie zdefiniujemy najpierw dodawanie zbiorów jako sumę algebraiczną dwóch zbiorów, tzn. dla zbiorów A i X :

$$A + X = \{a + x : a \in A, x \in X\}.$$

Długo się nie zastanawiając, można znaleźć kontrprzykład mówiący o tym, iż nie zawsze odejmowanie zbiorów jest poprawne.

Przykład. Ustalmy zbiory na prostej \mathbb{R} , niech $A = [0, 1]$, $B = [8, 9]$ oraz $X = \mathbb{R}$. Jeżeli odejmowanie zbiorów byłoby prawidłowe w każdym przypadku, to:

$$A + X = B + X \iff A = B,$$

ale $A \neq B$.

Czy jednak upoważnia nas to zaniechania poszukiwań? W swojej pracy *An embedding theorem for spaces of convex sets* szwedzki matematyk Hans Rådström dowodzi, że przy odpowiednich założeniach skracanie zbiorów w przestrzeni liniowej jest prawidłowe. Matematyk twierdzi, że jeśli zbiór B jest domknięty oraz wypukły (tzn. dla każdych dwóch punktów ze zbioru jesteśmy w stanie poprowadzić odcinek je łączący, który zawiera się w zbiorze – na prostej \mathbb{R} zbiorami wypukłymi są np. przedziały), a zbiór X jest zbiorem ograniczonym, to:

$$A + X \subseteq B + X \iff A \subseteq B.$$

Istotnie: można pokazać, że dowolny element ze zbioru A jest elementem zbioru B . Ustalmy dowolny element $a \in A$. Dla dowolnego elementu $x_1 \in X$, $a + x_1 \in B + X$, tzn. istnieją takie elementy $b_1 \in B$ i $x_2 \in X$ że $b_1 + x_2 = a + x_1$. Powtarzając dokładnie to samo rozumowanie, stwierdzamy, że muszą istnieć takie $b_2 \in B, x_3 \in X$, że $b_2 + x_3 = a + x_2$. Po n powtórzeniach powyższej procedury i zsumowaniu otrzymujemy następującą równość:

$$\sum_{i=1}^n b_i + \sum_{i=2}^{n+1} x_i = na + \sum_{i=1}^n x_i.$$

Przenosząc $\sum_{i=1}^n x_i$ na lewą stronę równości oraz dzieląc obie strony przez n , mamy:

$$\frac{\sum_{i=1}^n b_i}{n} + \frac{x_{n+1}}{n} - \frac{x_1}{n} = a.$$

Wystarczy teraz zauważyć, że skoro zbiór X jest ograniczony, to:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{n+1}}{n} - \frac{x_1}{n} \right) = 0$$

oraz, ze względu na wypukłość B zachodzi:

$$\frac{\sum_{i=1}^n b_i}{n} \in B$$

dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Po uwzględnieniu powyższych obserwacji, otrzymujemy:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n b_i}{n} = a.$$

Zbiór B jest zbiorem domkniętym, więc $a \in B$, co dowodzi poprawności rozumowania autora artykułu.

Jeśli założymy równość zbiorów $A + X = B + X$, gdzie zbiór X jest ograniczony, a zbiór B wypukły i domknięty, poniższa równoważność:

$$A + X = B + X \iff A = B$$

również jest prawdziwa. Istotnie: równanie $A + X = B + X$ możemy zapisać jako koniunkcję zawierań:

$$(A + X) \subseteq (B + X) \wedge (B + X) \subseteq (A + X)$$

i przeprowadzić analogiczne rozumowanie jak powyżej.

Jak widać odpowiedź na zadane na początku artykułu pytanie jest twierdząca. Jakie obiekty i przy jakich założeniach możemy jeszcze odejmować w ten sposób? Pytanie pozostaje otwarte.

Magdalena Wnętrzak

Literatura

- [1] Hans Rådström, *An embedding theorem for spaces of convex sets*, Proc. Am. Math. Soc. 3, 165-169 (1952)

[Liczby algebraiczne i przestępne]

W tym artykule zajmiemy się liczbami algebraicznymi i przestępnymi. Przekonamy się, że niełatwo wymyślić przykład liczby przestępnej chociaż, jak się okaże, jest ich nieprzeliczalnie wiele. Podobno Euler o liczbach przestępnych powiedział, że „przestępują one możliwości metod algebraicznych”, co może wyjaśniać ich nazwę.

Definicja 1. Mówimy, że liczba $x \in \mathbb{R}$ jest liczbą algebraiczną, gdy istnieje taki niezerowy wielomian $W \in \mathbb{Q}[X]$, że x jest jego pierwiastkiem.

Definicja 2. Stopniem liczby algebraicznej $x \in \mathbb{R}$ nazywamy najmniejszy stopień wielomianu o współczynnikach wymiernych, którego x jest pierwiastkiem.

Przykładem liczby algebraicznej jest dowolna liczba wymierna q , gdyż jest pierwiastkiem wielomianu $X - q$. Przykładem niewymiernej liczby algebraicznej jest $\sqrt{2}$ jako pierwiastek wielomianu $X^2 - 2$.

Definicja 3. Liczbę $x \in \mathbb{R}$, która nie jest liczbą algebraiczną, nazywamy liczbą przestępną.

Dokładnie tak samo definiuje się zespolone liczby algebraiczne i przestępne. W tym artykule skupimy się jednak na rzeczywistych liczbach algebraicznych i przestępnych.

Definicja 4. Wagą wielomianu f nazywamy liczbę $\omega(f)$ daną wzorem:

$$\omega(f) := st(f) + \sum_{i=0}^{st(f)} |a_i|,$$

gdzie $a_0, a_1, \dots, a_{st(f)}$ są współczynnikami wielomianu f .

Twierdzenie 1. *Zbiór rzeczywistych liczb przestępnych jest nieprzeliczalny.*

Dowód. Udowodnimy, że zbiór rzeczywistych liczb algebraicznych jest przeliczalny. Niech x będzie liczbą algebraiczną. Wówczas x jest rozwiązaniem pewnego równania $F(x) = 0$, gdzie $F \in \mathbb{Q}[X]$ jest niezerowy. Równanie to można łatwo sprowadzić do postaci, w której lewa strona wyraża się wzorem:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

gdzie

$$a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z} \text{ i } a_i \neq 0, \text{ dla pewnego } i \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

Zdefiniujmy zbiory

$$A_k := \{f \in \mathbb{Z}[X] : \omega(f) = k\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Zauważmy, że

$$\bigwedge_{k \in \mathbb{N}} |A_k| < \infty,$$

zatem zbiór

$$\mathbb{Z}[X] = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{f \in \mathbb{Z}[X] : \omega(f) = k\}$$

jest przeliczalny. Skoro

$$\bigwedge_{f \in \mathbb{Z}[X]} |\{\alpha \in \mathbb{R} : f(\alpha) = 0\}| < \infty,$$

to zbiór

$$K := \bigcup_{f \in \mathbb{Z}[X]} \{\alpha \in \mathbb{R} : f(\alpha) = 0\}$$

jest przeliczalny. Zatem zbiór liczb algebraicznych jest przeliczalny. \square

Z powyższego twierdzenia wynika, że liczb przestępnych jest dosyć dużo, co może sugerować, że łatwo wymyślić przykład takiej liczby. Okazuje się jednak, że nie jest to takie łatwe. Udowodnimy kilka faktów potrzebnych do podania przykładów liczb przestępnych.

Twierdzenie 2 (Liouville'a). *Jeżeli $\alpha \in \mathbb{R}$ jest niewymierną rzeczywistą liczbą algebraiczną stopnia $n > 1$, to istnieje taka stała $S > 0$ (zależna od α), że dla każdej liczby wymiernej $\frac{p}{q}$, gdzie $p, q \in \mathbb{Z}$, $q > 0$ jest spełniona nierówność*

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \frac{S}{q^n}.$$

Dowód. Skoro α jest liczbą algebraiczną, to istnieje wielomian $f \in \mathbb{Q}[X]$, $st(f) = n$. Zauważmy, że wielomian f nie ma pierwiastków wymiernych różnych od α . Istotnie: założmy, że wielomian f ma pierwiastek wymierny β różny od α . Wówczas wielomian f jest podzielny przez $X - \beta$, co oznaczałoby, że α jest pierwiastkiem wielomianu stopnia niższego niż n . To jest sprzeczne z założeniem o stopniu liczby algebraicznej α . Stąd

$$\bigwedge_{p, q \in \mathbb{Z}, q > 0} f\left(\frac{p}{q}\right) \neq 0.$$

Oczywiście

$$\bigwedge_{x \in [\alpha-1, \alpha+1]} |f'(x)| < N, \text{ dla pewnego } N > 0.$$

Możemy założyć, że $N > 1$. Ustalmy dowolnie $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. Rozważmy następujący przypadek:

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < 1.$$

Wówczas

$$\left| f\left(\frac{p}{q}\right) \right| = \left| \frac{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}{q^n} \right| \geq \frac{1}{q^n},$$

bo

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 + a_0 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},$$

co wynika z wcześniej zauważonego faktu, że wielomian f nie ma pierwiastka wymiernego różnego od α . Korzystając z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej, otrzymujemy:

$$\bigvee_{\xi \in (\alpha, \frac{p}{q})} \left(\left(\frac{p}{q}, \alpha\right) \right) \left| f\left(\frac{p}{q}\right) \right| = \left| f\left(\frac{p}{q}\right) - \alpha \right| = |f'(\xi)| \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < N \left| \alpha - \frac{p}{q} \right|.$$

Otrzymaliśmy więc następujące nierówności:

$$\frac{1}{q^n} \leq \left| f\left(\frac{p}{q}\right) \right| < N \left| \alpha - \frac{p}{q} \right|;$$

stąd

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{Nq^n} = \frac{S}{q^n}, \text{ gdzie } S = \frac{1}{N} > 0.$$

W przypadku, gdy

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq 1,$$

teza twierdzenia jest oczywista. □

Definicja 5. Liczbę $\mu \in \mathbb{R}$ nazywamy liczbą Liouville'a, jeśli

$$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \bigvee_{p, q \in \mathbb{Z}, q > 1} 0 < \left| \mu - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^n}.$$

Twierdzenie 3. Każda liczba Liouville'a jest niewymierna.

Dowód. Załóżmy, że pewna liczba Liouville'a L jest wymierna. Wówczas liczba L jest postaci

$$L = \frac{l}{m}, \text{ dla pewnych } l, m \in \mathbb{Z}, m > 1.$$

Dobierzmy taką liczbę naturalną $n \in \mathbb{N}$, że

$$2^{n-1} > m.$$

Wówczas dla dowolnych $p, q \in \mathbb{Z}$, $q > 1$ oraz $\frac{p}{q} \neq \frac{l}{m}$ zachodzi:

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| = \left| \frac{l}{m} - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{1}{mq} > \frac{1}{2^{n-1}q} \geq \frac{1}{q^n},$$

co prowadzi do sprzeczności. Zatem każda liczba Liouville'a jest niewymierna. \square

Następne twierdzenie podaje przykłady liczb Liouville'a.

Twierdzenie 4. *Każda liczba $x \in \mathbb{R}$ postaci:*

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{10^j}, \text{ gdzie } c_j \in \{1, \dots, 9\}, j = 0, 1, \dots,$$

jest liczbą Liouville'a.

Dowód. Niech $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem sum częściowych szeregu

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{10^j},$$

tzn.

$$s_n = \sum_{j=1}^n \frac{c_j}{10^j}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Oczywiście $s_n \in \mathbb{Q}$, dla $n \in \mathbb{N}$, zatem s_n można zapisać jako ułamek

$$\frac{p}{q}, \text{ gdzie } q = 10^n, p \in \mathbb{N}.$$

Wobec tego

$$\begin{aligned} \left| x - \frac{p}{q} \right| &= \frac{c_{n+1}}{10^{(n+1)!}} + \frac{c_{n+2}}{10^{(n+2)!}} + \dots \leq \frac{9}{10^{(n+1)!}} + \frac{9}{10^{(n+2)!}} + \dots = \\ &= \frac{9}{10^{(n+1)!}} \left(1 + \left(\frac{1}{10^{(n+1)!}} \right)^{(n+2)-1} + \left(\frac{1}{10^{(n+1)!}} \right)^{(n+2)(n+3)-1} + \dots \right) < \\ &< \frac{9}{10^{(n+1)!}} \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \dots \right) = \frac{10}{10^{(n+1)!}}. \end{aligned}$$

Zatem dla $n \in \mathbb{N}$

$$0 < |x - s_n| = \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{10}{10^{(n+1)!}} = \frac{10}{10^{(n)!n}10^n!} \leq \frac{1}{10^{n!n}} = \frac{1}{q^n}.$$

□

Twierdzenie 5. *Każda liczba Liouville'a jest przestępna.*

Dowód. Niech $\mu \in \mathbb{R}$ będzie liczbą Liouville'a. Załóżmy dla dowodu nie wprost, że μ jest liczbą algebraiczną o stopniu większym niż 1. Wiemy już, że μ jest liczbą niewymierną. Korzystając z twierdzenia Liouville'a, dostajemy

$$\bigvee_{S>0} \bigwedge_{p \in \mathbb{Z}} \bigwedge_{q \in \mathbb{N}} \left| \mu - \frac{p}{q} \right| > \frac{S}{q^n}.$$

Dobierzmy $k \in \mathbb{N}$ tak, żeby $2^k S \geq 2^n$ oraz $k \geq n$. Skoro μ jest liczbą Liouville'a, to

$$\bigvee_{p, q \in \mathbb{Z}, q > 1} 0 < \left| \mu - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^n}.$$

Wówczas

$$\frac{1}{q^k} > \frac{S}{q^n},$$

a stąd

$$S < q^{n-k} \leq 2^{n-k} \leq S,$$

sprzeczność. □

Dopiero po powyższym twierdzeniu w końcu mamy jakieś przykłady liczb przestępnych. Z powyższych dwóch twierdzeń wynika, że liczba

$$c = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{10^{j!}} = 0,11000100000000000000000000100\dots$$

jest liczbą przestępna.

Innymi przykładami liczb przestępnych są na przykład e lub π , czego jednak nie będziemy udowadniać.

Literatura

- [1] J. Górnicki, *Okruchy matematyki*, PWN, Warszawa, 2009.
 [2] M. Filaseta, *The Beginning of Transcendental Numbers*, Columbia, 2001.

[Teoria gier w praktyce: Snake]

Rozważmy klasyczną wersję znanej gry *Snake*, która rozgrywa się na ustalonej planszy $n \times m$ (co najmniej 3×3). Przypomnijmy: gracz steruje wężykiem, który w każdym kroku porusza się w wybranym kierunku: poziomo lub pionowo o jedno pole, ciągnąc za sobą swój ogon. Na planszy do zebrania jest jabłko, po zjedzeniu którego wąż wydłuża swój ogon o jedno pole – wówczas w wolnym miejscu rozmieszczane jest kolejne jabłko. Gra kończy się porażką gracza, gdy wąż uderzy w swój ogon lub brzeg planszy. Za zwycięstwo możemy uznać sytuację, gdy wąż jest tak duży, że pokrywa całą planszę i nie można rozmieścić już żadnego jabłka. Początkowy wąż jest wymiarów 2×1 .

Dokonamy paru modyfikacji w tej grze: do gry wprowadzamy nowego gracza, który na początku rozgrywki ustawia pozycję i kierunek początkowy węża, stawia pierwsze jabłko i przy każdym zebraniem przez pierwszego gracza jabłka rozmieszcza według uznania kolejne. Pierwszy gracz natomiast ma nieograniczony czas na ruch węża w wybranym kierunku. Gracz pierwszy nie może powtórzyć swojego układu, tj. po pewnym czasie powrócić do swojego poprzedniego ułożenia węża na planszy; sytuacja taka traktowana jest jako zwycięstwo drugiego gracza.

Problem. Czy któryś z graczy ma strategię wygrywającą?

Zanim podejmiemy się problemu, zauważmy, że samo napisanie algorytmu wygrywającego nie rozwiązuje problemu (dlaczego?). Co więcej: jest to niepotrzebne.

Przede wszystkim zauważmy, że gra jest skończona – liczba możliwości w każdym kroku jest, oczywiście, skończona, a liczba ruchów jest skończona. Limit ruchów możemy łatwo oszacować. Wąż o długości dwóch pól w każdym kroku realizuje pewien układ. Takich układów jest nie więcej niż liczby sposobów wybrania dwóch pól ze zbioru $n \times m$ -elementowego, przemnożonej dwukrotnie dla uwzględnienia kierunku ruchu². Z zasady szufladkowej Dirichleta wąż musi powtórzyć jakiś układ po wykonaniu $2 \cdot \binom{nm}{2} + 1$ ruchów.

²Oszacowanie jest stosunkowo grube: znaczna część ułożeń nie jest realizowana – wąż nie może być pofragmentowany.

Ponieważ jedno pole jest zajęte przez jabłko, nm możemy śmiało zastąpić liczbą $nm - 1$. Dla uproszczenia obliczeń skorzystajmy z poniższego oszacowania:

$$2 \cdot \binom{nm-1}{2} + 1 \leq 2 \cdot \binom{nm}{2}.$$

Gracz pierwszy, by kontynuować grę, musi zjeść pierwsze jabłko nie później niż po $2 \cdot \binom{nm}{2}$ kroku. Wówczas na podobnej zasadzie co poprzednio wnioskujemy, iż liczba możliwych ruchów pierwszego gracza nie przekracza $2 \cdot \binom{nm}{3}$, jako że wąż zajmuje teraz trzy pola. Prowadząc rozumowanie do końca, liczbę ruchów pierwszego gracza w całej grze ograniczyć możemy przez

$$2 \cdot \binom{nm}{2} + 2 \cdot \binom{nm}{3} + \dots + 2 \cdot \binom{nm}{nm} \leq 2 \cdot \sum_{k=0}^{nm} \binom{nm}{k} = 2^{nm+1}.$$

Drugi gracz w całej grze wykona co najwyżej nm ruchów, co po zsumowaniu z poprzednim wynikiem daje szukane górne ograniczenie. Dla nas istotny jest płynący z tego wniosek, iż w pewnym momencie gra zawsze będzie już rozstrzygnięta. Ponieważ nie ma remisów, któryś z graczy wygra.

Każdy z graczy ma pełną wiedzę o rozgrywce w czasie gry – zarówno pozycja wszystkich obiektów na planszy, jak i wszystkie możliwości ruchu obu graczy są znane obu graczom w każdej chwili.

Przypuśćmy nie wprost, iż gra w pewnym momencie nie jest zdeterminowana, tj. żaden z graczy nie posiada strategii wygrywającej. Bez straty ogólności założmy, że ruch wykonać ma gracz drugi, który może umieścić jabłko w jednym z kilku pól. Z racji iż nie posiada strategii wygrywającej, nie istnieje sekwencja ruchów gwarantująca mu zwycięstwo niezależnie od ruchów pierwszego gracza. Równoważnie dla każdej sekwencji ruchów istnieje odpowiedź drugiego gracza, w której gracz drugi nie ma zapewnionego zwycięstwa. To znaczy, że brak strategii wygrywającej pociąga brak strategii w kolejnej turze dla pewnej odpowiedzi pierwszego gracza. Stąd w ostatniej turze rozgrywki, a taka nastąpi, gdyż gra jest skończona, gracz drugi wciąż pozostanie bez strategii wygrywającej. Ponieważ gra rozstrzygnąć się musi zwycięstwem któregoś z graczy, gracz drugi przegra. Tym samym niezależnie od wykonanych ruchów gracza drugiego gracz pierwszy posiada sekwencję ruchów, która prowadzi do zwycięstwa, a, jako że ma pełną informację o grze, sekwencja ta stanowi strategię wygrywającą – wbrew założeniu.

To oznacza, że gra *Snake* jest zdeterminowana i któryś z graczy posiada strategię wygrywającą (niekoniecznie jedyną).

Na koniec najciekawsza część: w naszym rozumowaniu nie wykorzystywaliśmy zasad gry! Istotny był fakt, iż gra była grą dwuosobową o pełnej informacji, skończonej liczbie ruchów i możliwości, która kończyła się koniecznym zwycięstwem dokładnie jednego gracza. Ta sama argumentacja pozostaje prawdziwa dla każdej gry dla dwóch graczy o tych własnościach. Co prawda z naszego rozumowania nie możemy wywnioskować, **który** gracz zwycięża, jednakże w każdej grze o powyższych własnościach możemy spodziewać się takowej. Wyznaczenie strategii wygrywającej czy jedynie gracza wygrywającego często okazuje się zadaniem nad wyraz złożonym obliczeniowo. Jeżeli w grze w szachy doprowadzenie do remisu potraktujemy jako porażkę³, w takim – z pozoru symetrycznym – wariancie któraś ze stron będzie stroną wygrywającą. Jednakże informacja o zdeterminowaniu gry nie pomaga odpowiedzieć na pytanie, czy warto grać białymi, czy może to gra czarnymi jest uprzywilejowana. Na zakończenie:

Problem. Czy twierdzenie pozostaje prawdziwe dla gier nieskończonych?

Mateusz Szymański

³W niektórych sytuacjach należałoby jasno określić, która ze stron odpowiedzialna jest za remis. Jedną z nich jest remis ogłoszony po 50 posunięciach bez bicia/ruchu pionem, który, wprowadzony obligatoryjnie dla graczy, gwarantuje rozstrzygnięcie każdej gry w pewnej skończonej liczbie ruchów.

[Stopka redakcyjna]

Redaktor naczelny: Joanna Zwierzyńska

Autorzy artykułów: Agnieszka Morawiecka, Łukasz Rak, Monika Richter, Mateusz Szymański, Andrzej Więckowski, Magdalena

Wnętrzak

Skład i łamanie w L^AT_EX: Marcin Jenczmyk

Kontakt z redakcją bezpośrednio w pokoju KNM (p.524)
lub elektronicznie: macierzator@knm.katowice.pl

Archiwalne numery [MACIERZATORA] dostępne są również w wydaniu elektronicznym na stronie internetowej KNM UŚ: www.knm.katowice.pl.
Wydanie elektroniczne [MACIERZATORA] posiada numer ISSN: 2083-9774.

czerwiec 2015